3 dimensions : N vitesses

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(v_1,t) = -\frac{2}{3}(\pi\sigma)^2 f(v_1,t)\int_0^\infty dv_2\, v_2^2\, f(v_2,t)\left[\frac{(v_1+v_2)^3-|v_1-v_2|^3}{v_1 v_2}\right] & (1) \\ f(v,t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i(t)}{4\pi c_i^2}\,\delta(v-c_i) \quad ; \quad c_1>0 \; ; \quad c_j>c_i \;\; \forall j>i. & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\frac{\dot n_i}{c_i^2}\delta(v_1-c_i) = -\frac{2}{3}\frac{(\pi\sigma)^2}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\frac{n_i}{c_i^2}\delta(v_1-c_i)\int_0^\infty dv_2\, v_2^2\left[\frac{(v_1+v_2)^3-|v_1-v_2|^3}{v_1v_2}\right]\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\frac{n_i}{c_i^2}\delta(v_2-c_i) \qquad (3)$$

Coefficient de $\delta(v_1-c_i)$:

$$\cancel{\frac{1}{4\pi}}\frac{\dot n_i}{\cancel{c_i^2}} = -\frac{2}{3}(\pi\sigma)^2\cancel{\frac{1}{4\pi}}\frac{n_i}{\cancel{c_i^2}}\int_0^\infty dv_2\, v_2^2\left[\frac{(v_1+v_2)^3-|v_1-v_2|^3}{v_1v_2}\right]\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{n_j}{c_j^2}\delta(v_2-c_j) \quad ; \; |v_1|=c_i$$

$$\Rightarrow \dot n_i = -\frac{2}{3}\frac{(\pi\sigma)^2}{4\pi}\, n_i\sum_{j=1}^{N}\frac{n_j}{c_j^2}\underbrace{\int_0^\infty dv_2\, v_2^2\left[\frac{(v_1+v_2)^3-|v_1-v_2|^3}{v_1v_2}\right]\delta(v_2-c_j)\Big|_{|v_1|=c_i}}$$

$$= \int_0^\infty dv_2\, v_2^2\left[\frac{(c_i+v_2)^3-|c_i-v_2|^3}{c_iv_2}\right]\delta(v_2-c_j)$$

$$= c_j^2\,\frac{(c_i+c_j)^3-|c_i-c_j|^3}{c_ic_j}$$

$$= -\frac{\cancel{2}}{3}\frac{(\pi\sigma)^2}{\underset{2}{\cancel{4}}\pi}\, n_i\sum_{j=1}^{N}\frac{n_j}{\cancel{c_j^2}}\frac{\cancel{c_j^2}}{c_ic_j}\left((c_i+c_j)^3-|c_i-c_j|^3\right) \quad ; \quad 3 \text{ cas}: \begin{cases} i>j \\ i<j \\ i=j \end{cases}$$

$$= -\frac{\pi}{6}\sigma^2\, n_i\sum_{j=1}^{N} n_j\,\frac{(c_i+c_j)^3-|c_i-c_j|^3}{c_ic_j} \qquad (3b)$$

$$= -\frac{\pi}{6}\sigma^2 n_i\left[\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} n_j\,\frac{(c_i+c_j)^3-|c_i-c_j|^3}{c_ic_j}} + \underbrace{\sum_{j=i}^{i} n_j\,\frac{(c_i+c_j)^3-|c_i-c_j|^3}{c_ic_j}} + \underbrace{\sum_{j=i+1}^{N} n_j\,\frac{(c_i+c_j)^3-|c_i-c_j|^3}{c_ic_j}}\right]$$

$i>j \Rightarrow c_i>c_j$

⚠ si $i=1$: si la somme n'est pas définie, alors on oublie ce terme.

$c_i>c_j \Rightarrow |c_i-c_j| = c_i-c_j$

$$\Rightarrow = \sum_{j=1}^{i-1} n_j\,\frac{(c_i+c_j)^3-(c_i-c_j)^3}{c_ic_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{i-1} n_j\,\frac{1}{c_ic_j}\left(6c_i^2c_j+2c_j^3\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{i-1} n_j\left(6c_i\cancel{c_j}+2\frac{c_j^{3}}{c_i}\right)\frac{1}{\cancel{c_j}}$$

$i=j \Rightarrow c_i=c_j$

$$= n_i\,\frac{(2c_i)^3}{c_ic_i} \; ;$$

$$= 8n_ic_i$$

$i<j \Rightarrow c_i<c_j$

⚠ si $i=N$: " – ".

$c_i<c_j \Rightarrow |c_i-c_j| = c_j-c_i$

$$= \sum_{j=i+1}^{N} n_j\,\frac{(c_i+c_j)^3-(c_j-c_i)^3}{c_ic_j}$$

$$= \sum_{j=i+1}^{N} n_j\,\frac{1}{c_ic_j}\left(2c_i^3+6c_ic_j^2\right)$$

$$= \sum_{j=i+1}^{N} n_j\left(\frac{2c_i^2}{c_j}+6c_j^{\cancel{2}}\right)\frac{1}{\cancel{c_i}}$$

$$= -\frac{\pi}{3}\sigma^2 n_i\left[\sum_{j=1}^{i-1} n_j\left(3c_i+\frac{c_j^2}{c_i}\right) + 4n_ic_i + \sum_{j=i+1}^{N} n_j\left(\frac{c_i^2}{c_j}+3c_j\right)\right]\cdot\frac{c_N}{c_N}$$

$$= -\frac{\pi}{3}\sigma^2 c_N n_i\left[\sum_{j=1}^{i-1} n_j\left(3\frac{c_i}{c_N}+\frac{c_j^2}{c_ic_N}\right) + 4n_i\frac{c_i}{c_N} + \sum_{j=i+1}^{N} n_j\left(\frac{c_i^2}{c_jc_N}+3\frac{c_j}{c_N}\right)\right] \quad \frac{\pi\sigma^2}{3}c_N$$

$$\Rightarrow \dot n_i = -n_i\left[\sum_{j=1}^{i-1} n_j\left(3\frac{c_i}{c_N}+\frac{c_j^2}{c_ic_N}\right) + 4n_i\frac{c_i}{c_N} + \sum_{j=i+1}^{N} n_j\left(\frac{c_i^2}{c_jc_N}+3\frac{c_j}{c_N}\right)\right] \quad ; \quad \gamma_i = \frac{c_i}{c_N} < 1 \;\forall i<N, \quad \gamma_N = 1.$$

$$\dot n_i = -n_i\left[\sum_{j=1}^{i-1} n_j\left(3\gamma_i+\frac{c_j}{c_i}\gamma_j\right) + 4n_i\gamma_i + \sum_{j=i+1}^{N} n_j\left(3\gamma_j+\frac{c_i}{c_j}\gamma_i\right)\right] \qquad (4)$$

Vérification : cas particulier $N=2$:

$$\dot{n}_i = -n_i\left[\sum_{j=1}^{i-1} n_j\left(3\gamma_i + \frac{c_j}{c_i}\gamma_j\right) + 4n_i\gamma_i + \sum_{j=i+1}^{2} n_j\left(3\gamma_j + \frac{c_i}{c_j}\gamma_i\right)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{n}_1 = -n_1\left[\cancel{\sum_{j=1}^{0}} + 4n_1\gamma_1 + \sum_{j=2}^{2} \underset{\downarrow\, n_2}{n_j}\left(3\underset{\downarrow\, \gamma_2=1}{\gamma_j} + \underset{\downarrow\, \frac{c_1}{c_2}=\gamma_1}{\frac{c_1}{c_j}}\gamma_1\right)\right] = -n_1\left[4n_1\gamma_1 + n_2(3+\gamma_1^2)\right] \\ \dot{n}_2 = -n_2\left[\underbrace{\sum_{j=1}^{1} n_j\left(3\overset{=1}{\gamma_2} + \frac{c_j}{c_2}\gamma_j\right)}_{= n_1\left(3 + \frac{c_1}{c_2}\gamma_1\right)} + 4n_2\underset{\downarrow\, =1}{\gamma_2} + \cancel{\sum_{j=3}^{2}}\right] = -n_2\left[n_1(3+\gamma_1^2) + 4n_2\right] \end{cases}$$

$n_1 = X$
$n_2 = Y$

$$\underset{\gamma_1=\gamma}{\Longrightarrow} \begin{cases} \dot{X} = -4X^2\gamma - XY(3+\gamma^2) \\ \dot{Y} = -4Y^2 - XY(3+\gamma^2) \end{cases}$$

Ok, ce sont les mêmes équations que précédemment établies.

Introduisons

$$\gamma_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \leq 1 \ \forall j \geq i \quad \text{t.q.} \quad \gamma_{iN} = \gamma_i$$

et il faut formaliser les sommes : somme 1 indéfinie si $i-1<1$, i.e. si $i<2$, donc il faut que $i>1$.
Somme 2 indéfinie si $N < i+1$, i.e. si $i > N-1$, donc il faut que $i<N$.

$$\Theta(x-a) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq a \\ 1 \text{ si } x > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{n}_i = -n_i\left[\Theta(i-1)\sum_{j=1}^{i-1} n_j\left(3\gamma_i + \gamma_{ji}\gamma_j\right) + 4n_i\gamma_i + \Theta(N-i)\sum_{j=i+1}^{N} n_j\left(3\gamma_j + \gamma_{ij}\gamma_i\right)\right]} \quad (5)$$

Ou bien de façon équivalente :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{n}_1 &= -n_1\left[4n_1\gamma_1 + \sum_{j=2}^{N} n_j\left(3\gamma_j + \gamma_{1j}\gamma_1\right)\right] \\ \dot{n}_i &= -n_i\left[\sum_{j=1}^{i-1} n_j\left(3\gamma_i + \gamma_{ji}\gamma_j\right) + 4n_i\gamma_i + \sum_{j=i+1}^{N} n_j\left(3\gamma_j + \gamma_{ij}\gamma_i\right)\right], \quad i = 2,\dots,N-1 \\ \dot{n}_N &= -n_N\left[\sum_{j=1}^{N-1} n_j\left(3 + \gamma_j^2\right) + 4n_N\right] \end{aligned}} \quad (6)$$

Avec :

$$\gamma_{ij} = \frac{c_i}{c_j} < 1 \quad \forall j > i \quad ; \quad c_i < c_{i+1} \quad \forall i = 1,\dots,N-1$$
$$\gamma_i = \gamma_{iN} \quad ; \quad \gamma_i < \gamma_{i+1} \quad \forall i = 1,\dots,N-1$$

Argument pour dire que $n_1(t) \sim 1/4\gamma_1\tau$: comme les vitesses des espèces plus rapides sont plus grandes que c_1, alors ces espèces vont avoir tendance à décroître plus rapidement (on le voit des études 2d, 3d, $d>3$ par 2 c.I.), par conséquent les non linéarités du type $n_i n_j$ peuvent être négligées $\forall i,j \neq 1$. Si $n_i = O(\varepsilon)$ $\forall i \neq 1$, alors :

$$\begin{aligned} n_i n_j &= O(\varepsilon^2) \quad \forall i,j \neq 1 \\ n_1 n_j &= O(\varepsilon) \quad \forall j \neq 1 \\ n_1^2 &= O(1) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ on obtient pour n_1 :

$$\dot{n}_1 = -4\gamma_1 n_1^2 \quad ; \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{n_1}\right) = -\frac{1}{n_1^2}\dot{n}_1$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{n_1}\right) = -4\gamma_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{n_1(\tau)}{n_1(0)} \simeq \frac{1}{4\gamma_1\tau}} \quad ; \gamma_1 = \frac{c_1}{c_N} \quad (7)$$

VÉRIFIÉ NUMÉRIQUEMENT

Généralisation en dimension $d \geq 2$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(v_1,t) = -\sigma^{d-1} \beta_d f(v_1,t) \int_{\mathbb{R}^d} dv_2 \, |v_{12}| \, f(v_2,t) \\ f(v,t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i(t)}{S_d c_i^{d-1}} \delta(v-c_i) \end{cases} \quad ; \; \beta_d = \int d\hat{\sigma} \, \theta(\hat{\sigma}\hat{v}_{12})(\hat{\sigma}\hat{v}_{12}) = \pi^{\frac{d-1}{2}} / \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \quad (8)$$

$$; \; S_d = \int_{\mathbb{R}^d} d\Omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (9)$$

(9) dans (8) $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{S_d} \sum_{i=1}^{N} \frac{\dot{n}_i}{c_i^{d-1}} \delta(v_1-c_i) = -\sigma^{d-1} \beta_d \frac{1}{S_d} \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{c_i^{d-1}} \delta(v_1-c_i) \int_{\mathbb{R}^d} dv_2 \, |v_{12}| \frac{1}{S_d} \sum_{j=1}^{N} \frac{n_j}{c_j^{d-1}} \delta(v_2-c_j) \quad (10)$$

Coefficients de $\delta(v_1-c_i)$:

$$\cancel{\frac{1}{S_d}} \frac{\dot{n}_i}{\cancel{c_i^{d-1}}} = -\sigma^{d-1} \beta_d \cancel{\frac{1}{S_d}} \frac{n_i}{\cancel{c_i^{d-1}}} \int_{\mathbb{R}^d} dv_2 \, |v_{12}| \frac{1}{S_d} \sum_{j=1}^{N} \frac{n_j}{c_j^{d-1}} \delta(v_2-c_j) \Big|_{|v_1|=c_i}$$

$$\Longrightarrow \dot{n}_i = -\frac{\sigma^{d-1}\beta_d}{S_d} n_i \sum_{j=1}^{N} \frac{n_j}{c_j^{d-1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv_2 \, |v_{12}| \, \delta(v_2-c_j) \Big|_{|v_1|=c_i}}_{:= I_{ji}} \quad (10b)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv \sqrt{v^2+c^2-2vc\cos\theta_k} \; \delta(v-c)$$
$$= J_d c^{d-1} \int_0^\pi d\theta \sqrt{v^2+c^2-2vc\cos\theta} \, (\sin\theta)^{d-2}$$
$$= J_d c^{d-1} \int_0^\pi d\theta \sqrt{c_i^2+c_j^2-2c_ic_j\cos\theta} \, (\sin\theta)^{d-2}$$

Avec I_{ij} déjà calculé dans ma généralisation à d dimensions du cas à deux vitesses $N=2$:

$$I_{ij} = 2\pi J_d \sqrt{c_i^2+c_j^2} \, c_i^{d-1} F_d(c_i,c_j) \quad , \forall i,j=1,\dots,N \quad ; \; J_d = \begin{cases} 1/\pi & , \text{si } d=2 \\ 1 & , \text{si } d=3 \\ \prod_{k=1}^{d-3} \int_0^\pi d\theta_k (\sin\theta_k)^k & \text{si } d>3 \end{cases} \quad (11)$$

ou bien : $F_d(c_i,c_j) = \int_0^\pi d\theta \sqrt{1-2\underbrace{\frac{c_ic_j}{c_i^2+c_j^2}}_{=\frac{k^2}{2}}\cos\theta} \, (\sin\theta)^{d-2}$ ✓

$i=j \Rightarrow F_d = \int_0^\pi d\theta \overbrace{\sqrt{1-\cos\theta}}^{=\sqrt{2}\sin\theta/2} (\sin\theta)^{d-2}$

$$F_d(c_i,c_j) = \int_{-1}^{1} dx \sqrt{1-2\frac{c_ic_j}{c_i^2+c_j^2}x} \Big/ (1-x^2)^{\frac{d-3}{2}} = F_d(c_j,c_i)$$

$$F_d \equiv F_d(c_i,c_i) = \int_{-1}^{1} dx \sqrt{1-x} \Big/ (1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}$$

Si on fait le changement d'échelle de temps (défini de sorte que $n_1 \sim 1/4\gamma_1\tau$)

$$\boxed{\tau = t\,\sigma^{d-1} \frac{\beta_d J_d F_d}{S_d} \frac{\pi}{\sqrt{2}} c_N} \quad (12)$$

alors on retrouve bien celui en trois dimensions en posant $d=3$ dans (12) :

$$\tau(d=3) = t\,\sigma^2 \frac{\pi \cdot 1}{\cancel{4\pi}} \frac{4}{3}\cancel{\sqrt{2}} \frac{\pi}{\cancel{\sqrt{2}}} c_N = t \frac{\pi\sigma^2}{3} c_N .$$

(11) dans (10b) $\Longrightarrow$

$$\dot{n}_i = -\frac{\sigma^{d-1}\beta_d}{S_d} n_i \sum_{j=1}^{N} \frac{n_j}{\cancel{c_j^{d-1}}} \, 2\pi J_d \sqrt{c_i^2+c_j^2} \, \cancel{c_j^{d-1}} F_d(c_i,c_j) \qquad \Big| \cdot \frac{c_N}{c_N} \cdot \frac{F_d}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{F_d}$$

$$= -\sigma^{d-1} \frac{\beta_d J_d}{S_d} \frac{F_d \pi}{\sqrt{2}} c_N \frac{2\sqrt{2}}{F_d} \frac{1}{c_N} \cdot n_i \sum_{j=1}^{N} n_j \sqrt{c_i^2+c_j^2} \, F_d(c_i,c_j)$$

$$\overset{(12)}{\Longrightarrow} \dot{n}_i = -\frac{2\sqrt{2}}{F_d} n_i \sum_{j=1}^{N} n_j \sqrt{\frac{c_i^2}{c_N}+\frac{c_j^2}{c_N}} \, F_d(c_i,c_j)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{n}_i = -\frac{2\sqrt{2}}{F_d} \quad \dots \quad F_d(c_i,c_j)} \quad (13)$$

Argument sur la décroissance $n_1 \sim 1/4\gamma\tau$ en dimension $d \geq 2$:

$$\dot{n}_1 \simeq -2\sqrt{2}\, n_1 \sum_{j=1}^{N} n_j \sqrt{\gamma_1^2+\gamma_j^2} \, \frac{F_d(c_1,c_j)}{F_d} \delta_{j,1}$$
$$= -4\gamma_1 n_1^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{n_1 \simeq \frac{1}{4\gamma_1 \tau}} \qquad \forall \text{ dimension}$$

et aussi : changement de variables inverse :

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{B}{\frac{c_1}{c_N}\tau} \sim \frac{B}{c_1\tau} c_N \\ \tau &= A c_N t \end{aligned} \right\} \Rightarrow n_1(t) \simeq \frac{B}{A c_1 c_N t} c_N \sim \frac{1}{c_1 t}$$

indép de toutes les vitesses sauf c_1 !

Question : est-ce que (13) est bien équivalent à (6) (pas d'erreur de calcul) ? Relation (13) pour $d=3$ donne : (avec $F_3 = 4/3\,\sqrt{2}$)

$$\dot{n}_i = -\underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}3}_{=3/2} n_i \sum_{j=1}^{N} n_j \sqrt{\gamma_i^2+\gamma_j^2} \underbrace{\int_{-1}^{1} dx \sqrt{1-2\frac{c_ic_j}{c_i^2+c_j^2}x}}$$

$$= \frac{1}{c_N} \int_{-1}^{1} dx \sqrt{c_i^2+c_j^2-2c_ic_jx}$$

$$= \frac{1}{c_N} \frac{1}{3} \frac{(c_i+c_j)^3-|c_i-c_j|^3}{c_ic_j}$$

$$\Rightarrow \dot{n}_i = -\frac{\cancel{3}}{2} n_i \sum_{j=1}^{N} n_j \frac{1}{\cancel{3}} \frac{1}{c_N} \frac{(c_i+c_j)^3 - |c_i-c_j|^3}{c_i c_j} \quad ; \tau = t \frac{\pi\sigma^2}{3} c_N$$

$$= -\frac{1}{2} n_i \frac{1}{\cancel{c_N}} \frac{\pi\sigma^2}{3} \cancel{c_N} \sum_{j=1}^{N} n_j \frac{(c_i+c_j)^3 - |c_i-c_j|^3}{c_i c_j}$$

$$= -\frac{\pi}{6} \sigma^2 n_i \sum_{j=1}^{N} n_j \frac{(c_i+c_j)^3 - |c_i-c_j|^3}{c_i c_j}$$

Ce qui est bien la même relation que (36), donc (6) s'obtient bien de (13).

<u>Remarques</u> : – structure de l'équation générale (13) :

$$\dot{\underline{n}} = - \langle \underline{n} | A \underline{n} \rangle \quad ; \underline{n} = (n_1, \ldots, n_N) \; ; \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{N} \quad ; a_{ij} = \frac{2\sqrt{2}}{F_d} \sqrt{\gamma_i^2 + \gamma_j^2}\, F_d(c_i, c_j) > 0 \quad \forall i,j$$

– études à faire :

– preuve analytique de la décroissance algébrique des n_i, $i > 1$

– cas à 1 vitesse $c_1 = 0$

Essayons de prouver analytiquement la décroissance en loi de puissance : on a une équation du type:

$$\dot{n}_i = -n_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij} n_j \qquad ; \; a_{ij} = \frac{3}{2}\sqrt{\gamma_i^2+\gamma_j^2}\; F_d(c_i,c_j) > 0 \qquad (1)$$

par analogie au cas $\dot{n} \simeq -an^2 \Rightarrow n \sim 1/at$, est-ce qu'il n'existe pas m. thr. similaire ?

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{\underline{n}} = -\langle \underline{n} | A \underline{n} \rangle} \qquad ; \; A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{N} \qquad (2)$$

Supposons que par les temps longs :

$$\begin{cases} n_i \simeq B_i t^{-\beta_i} & ; \; \beta_i > \beta_j \quad \forall i > j \; ; \; \beta_1 = 1 ; \; B_i > 0 \;\; \forall i. \\ \dot{n}_i \simeq -\beta_i \dfrac{n_i}{t} = -\beta_i B_i t^{-\beta_i - 1} \end{cases}$$

(donc $\beta_i > 1 \; \forall i > 1$)

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad -\beta_i \frac{n_i}{t} = -n_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij} n_j$$

$$\Longrightarrow -\beta_i \cancel{B_i} t^{-\beta_i - 1} = -\cancel{B_i} t^{-\beta_i} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} B_j t^{-\beta_j}$$

$$\Longrightarrow \beta_i t^{-\beta_i - 1} = t^{-\beta_i} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} B_j t^{-\beta_j}$$

$$\Longrightarrow \beta_i t^{-1} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} B_j t^{-\beta_j}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\beta_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} B_j t^{1-\beta_j}} \qquad ; \; 1-\beta_j < 0 \;\; \forall j > 1 \; ; \; 1 - \beta_j = 0 \text{ si } j = 1.$$

~~Lotka-Volterra généralisé~~
~~Baunhoffer~~

~~Hofbauer, Sigmund~~
~~Evolutionary Games and Popular dynamics~~
~~Cambr. Univ. Press. 1988~~

→ ~~E.W. Montroll, Rev. Mod. Phys., 1965~~ ~ PROLA

Il faut voir s'il existe une telle solution avec $a_{ij} > 0$, $B_j > 0$ et $\beta_1 = 1$, $\beta_j > 1 \; \forall j > 1$. Supposons que dans le régime $t \to \infty$ on puisse négliger tout ce qui décroît plus vite que l'espèce i, i.e. on suppose $\beta_i > \beta_j \; \forall i > j$, alors:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} B_j t^{1-\beta_j}$$

avec:

$$\beta_1 = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \beta_2 = a_{21} B_1 + \underbrace{a_{12} B_2 t^{1-\beta_2}}_{\to 0 \text{ si on fait l'hyp. } \beta_2 > 1} \quad \Longrightarrow \quad \beta_2 = a_{11} B_1 > 0 \; ; \; \beta_2 > 1 \text{ ? hyp. auto consistante ?}$$

$$\Longrightarrow \quad \beta_3 = a_{31} B_1 + a_{32} B_2 \cancel{t^{1-\beta_2}}_{\to 0} + a_{33} B_3 \cancel{t^{1-\beta_3}}_{\to 0}$$

$$\Longrightarrow \quad \beta_1 = 1 ; \; \beta_i = \beta_2 \;\; \forall i \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad \lightning \qquad \lightning$$

Le même argument que celui utilisé pour $N=2$ ne semble pas marcher ici...

Question : pourquoi θ_{d-2} et non θ_1 dans l'intégration ?

Réponse : par construction des coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^d$

Explications : soient $\underline{v_1}, \underline{v_2} \in \mathbb{R}^d$, soit l'intégration : (on suppose $|v_1| = 1$ pour alléger l'écriture)

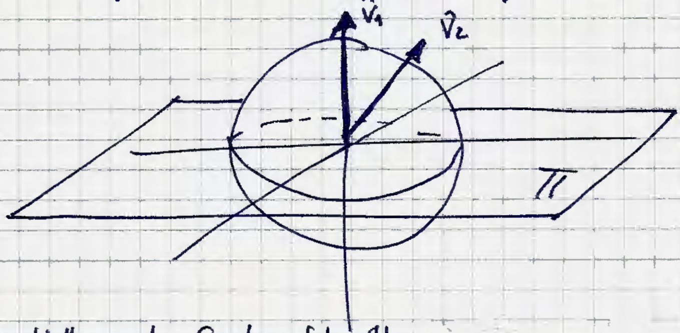
$$I = \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{v_2}\, \delta(v_2 - 1)\, \underline{v_1}\cdot\underline{v_2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{\pi} d\theta_{d-2}\, \underline{v_1}\cdot\underline{v_2} \prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{\pi} d\theta_{d-2}\, \underbrace{|v_1|\cdot|v_2|}_{=1} \cdot \cos\theta_{d-2} \prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k$$

pourquoi est-ce l'angle θ_{d-2} qui intervient ici ? Réponse : construisons les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^d$, commençons par x_1.

$$x_1 = \ldots ? \ldots = f(\theta_1, \ldots, \theta_{d-2}, \varphi) \quad \ldots \text{trouver } f.$$

Il faut commencer par chercher une direction privilégiée, prenons $\underline{v_1}$:



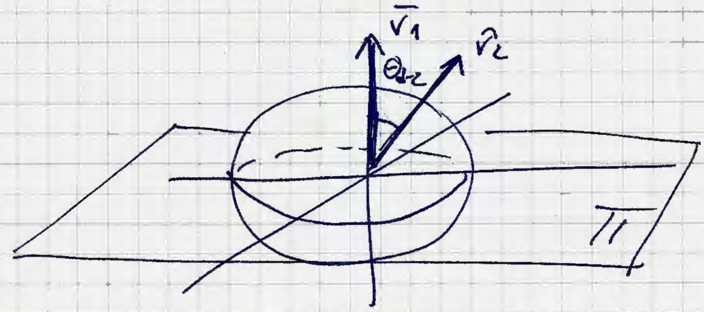
(illustration dans $\mathbb{R}^3$)

$\Pi \perp \mathrm{vect}\{v_1\}$

$\downarrow$

= ensemble des combinaisons linéaires.

L'idée est essentiellement Grahm-Schmidt.
On projette les composantes de $v_2 \in \mathbb{R}^d$ sur la direction $\underline{v_1}$, i.e. dans un espace de dimension 1 $\mathrm{vect}\{v_1\}$.
Pour ceci, on doit introduire l'angle θ_{d-2} entre $\underline{v_1}$ et $\underline{v_2}$ qui est donc défini comme l'angle entre $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ dans le sous-espace $\mathrm{vect}\{v_1, v_2\}$.
Cet angle θ_{d-2} existe donc toujours.



$$x_1 = \cos\theta_{d-2}$$

Pour x_2, on doit construire l'orthogonal à $\mathrm{vect}\{v_1\}$ qui lui soit complémentaire dans $\mathbb{R}^d$, i.e.

$$\mathrm{vect}\{v_1\} \oplus \underbrace{\mathrm{vect}\{v_1\}^\perp}_{=\pi \text{ dans le dessin ci-dessus}} = \mathbb{R}^d \implies x_2 \sim \sin\theta_{d-2}$$

A l'intérieur de l'orthogonal $\mathrm{vect}\{v_1\}^\perp$, on en extrait un sous-espace de dimension 1 grâce à θ_{d-3} :

$$x_2 = \sin\theta_{d-2} \cdot \cos\theta_{d-3}$$

et son orthogonal de dimension 1

$$x_3 = \sin\theta_{d-2}\, \sin\theta_{d-3}\, \cos\theta_{d-4}$$

et ainsi de suite jusqu'au dernier angle φ :

$$x_{d-1} = \sin\theta_{d-2} \cdots \sin\theta_1 \cos\varphi$$

$$x_d = \sin\theta_{d-2} \cdots \sin\theta_1 \sin\varphi$$

On a ainsi décomposé $\mathbb{R}^d$ en somme directe de sous-espaces orthogonaux. On voit donc que l'angle entre $\underline{v_1}$ et $\underline{v_2}$ doit être θ_{d-2} car cet angle décrit la projection de $\underline{v_2} \in \mathbb{R}^d$ dans le sous-espace de dimension 1 engendré par $\underline{v_1}$. Prendre un autre angle que θ_{d-2} reviendrait à faire n'importe quoi (même pas une projection dans un autre sous-espace car il n'y aurait qu'un angle au lieu de plusieurs ...)

Dimension arbitraire $d \geq 3$: cas général $0 < c_1 < c_2$ (+ cas particulier $c_1 = 0$ à la fin)

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v_1,t) = -\sigma^{d-1}\beta_d\, f(v_1,t) \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\, |v_{12}|\, f(v_2,t) \qquad ; \beta_d = \int d\hat\sigma\, \Theta(\hat\sigma \hat v_{12})(\hat\sigma v_{12}) = \pi^{\frac{d-1}{2}} / \Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)$$

Préliminaires :

$$I_{ij} = \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\, |v_{12}|\, \delta(v_2 - c_i) \overset{|v_1| = c_j}{=} \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\, |\hat v_1 c_j - v_2|\, \delta(v_2 - c_i) \qquad ; w = v_2/c_i \quad ; dv_2 = c_i^d\, dw$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} dw\, c_i^d\, |\hat v_1 c_j - \hat w c_i|\, \underbrace{\delta(w c_i - c_i)}_{= \frac{1}{c_i}\delta(w-1)}$$

$$= c_i^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} dw\, |\hat v_1 c_j - \hat w c_i|\, \delta(w-1)$$

1) $\underline{i=j}$:

$$I_{ii} = c_i^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} dw\, c_i\, |\hat v_1 - \hat w|\, \delta(w-1)$$

$$= c_i^d \int_{\mathbb{R}^d} dw\, \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta_{d-2}}\, \delta(w-1)$$

$$= \sqrt{2}\, c_i^d \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \ldots \int_0^\pi d\theta_{d-2}\, \sqrt{1-\cos\theta_{d-2}} \prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k$$

$$= \sqrt{2}\, c_i^d\, 2\pi \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{d-3} \int_0^\pi d\theta_k\, (\sin\theta_k)^k \right)}_{:= J_d} \underbrace{\int_0^\pi d\theta_{d-2}\, \sqrt{1-\cos\theta_{d-2}}\, (\sin\theta_{d-2})^{d-2}}$$

$; x = \cos\theta_{d-2}$
$dx = -\sin\theta_{d-2}\, d\theta$

$$= \int_1^{-1} \frac{dx}{-\sin\theta_{d-2}}\, (\sin\theta_{d-2})^{d-2}\, \sqrt{1-x}$$

$$= \int_{-1}^1 dx\, (\sin\theta_{d-2})^{d-3}\, \sqrt{1-x}$$

$; \theta_{d-2} = \arccos(x)$
$\sin(\arccos y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$$= \int_{-1}^1 dx\, \sqrt{1-x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{d-3}$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^1 dx\, \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}}}_{:= F_d}$$

$$= 2\pi \sqrt{2}\, c_i^d\, F_d\, J_d$$

$:= F_d$: intégrale se calcule en fonction de fonctions hypergéométriques

Sauf : $d = 5$. Mais bon, je préfère l'expression générale F_d.

2) $\underline{i \neq j}$:

$$I_{ij} = c_i^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} dw\, |\hat v_1 c_j - \hat w c_i|\, \delta(w-1)$$

$$= c_i^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} dw\, \sqrt{c_i^2 + c_j^2 - 2c_i c_j \cos\theta_{d-2}}\, \delta(w-1)$$

$$= c_i^{d-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \ldots \int_0^\pi d\theta_{d-2}\, \sqrt{c_i^2 + c_j^2 - 2c_i c_j \cos\theta_{d-2}} \prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k$$

$$= c_i^{d-1}\, 2\pi \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{d-3} \int_0^\pi d\theta_k\, (\sin\theta_k)^k \right)}_{= J_d} \underbrace{\int_0^\pi d\theta_{d-2}\, \sqrt{c_i^2 + c_j^2 - 2c_i c_j \cos\theta_{d-2}}\, (\sin\theta_{d-2})^{d-2}}$$

$x = \cos\theta_{d-2}$
$dx = -\sin\theta_{d-2}\, d\theta$

$$= \int_1^{-1} \frac{dx}{-\sin\theta_{d-2}}\, \sqrt{c_i^2 + c_j^2 - 2c_i c_j x}\, (\sin\theta_{d-2})^{d-2}$$

$$= \int_{-1}^1 dx\, (\sin\theta_{d-2})^{d-3}\, \sqrt{c_i^2 + c_j^2 - 2c_i c_j x}$$

$$= \int_{-1}^1 dx\, \frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{d-3}}\, \sqrt{c_i^2 + c_j^2}\, \sqrt{1 - 2\frac{c_i c_j}{c_i^2 + c_j^2} x}$$

ou bien écrire la forme en $\cos\theta$

$$= \sqrt{c_i^2 + c_j^2}\, \underbrace{\int_{-1}^1 dx\, \frac{\sqrt{1 - 2\frac{c_i c_j}{c_i^2 + c_j^2} x}}{(1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}}}_{= F_d(c_i, c_j)}$$

avec : $F_d = F_d(1,1)$

$$= c_i^{d-1}\, 2\pi J_d\, \sqrt{c_i^2 + c_j^2}\, F_d(c_i, c_j)$$

En résumé :
$$I_{ii} = 2\pi J_d\, c_i^{d-1}\, c_i \sqrt{2}\, F_d(1,1)$$
$$I_{ij} = 2\pi J_d\, c_i^{d-1} \sqrt{c_i^2+c_j^2}\, F_d(c_i,c_j)$$

; $\lim_{c_i\to 0} F_d(c_i,c_j) = \int_{-1}^{1} dx \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}}$: diverge : ne peut pas prendre la limite à posteriori

$\lim_{c_i\to 0} F_d(1,1) \neq$

$\lim_{c_i\to c_j} F_d(c_i,c_j) = F_d(1,1) = F_d(c_i,c_i)$

En fait $\lim_{c_i\to c_j} F_d(c_i,c_j) = F_d(c_i,c_i) = F_d$ est indép. de c_i,

donc on va noter :
$$\begin{cases} I_{ii} = 2\pi J_d\, c_i^d \sqrt{2}\, F_d \\ I_{ij} = 2\pi J_d\, c_i^{d-1}\sqrt{c_i^2+c_j^2}\, F_d(c_i,c_j) \end{cases} \quad \text{t.q. } F_d(c_i,c_i) = F_d .$$

Fonction de distribution :
$$f(v,t) = X \frac{1}{S_d c_1^{d-1}} \delta(v-c_1) + Y \frac{1}{S_d c_2^{d-1}} \delta(v-c_2) \quad ; \quad S_d = \int_{\mathbb{R}^d} d\Omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

Équation :
$$\dot X \frac{1}{S_d c_1^{d-1}} \delta(v_1-c_1) + \frac{\dot Y}{S_d c_2^{d-1}} \delta(v_1-c_2) = -\sigma^{d-1}\beta_d \left[\frac{X}{S_d c_1^{d-1}}\delta(v_1-c_1) + \frac{Y}{S_d c_2^{d-1}}\delta(v_1-c_2)\right] \int_{\mathbb{R}^d} dv_2 |v_{12}| \left[\frac{X}{S_d c_1^{d-1}}\delta(v_2-c_1) + \frac{Y}{S_d c_2^{d-1}} \delta(v_2-c_2)\right]$$

Coefficients $\Rightarrow$ équation pour X et Y :
$$\begin{cases} \dot X \frac{1}{\cancel{S_d c_1^{d-1}}} = -\sigma^{d-1}\beta_d \frac{X}{\cancel{S_d c_1^{d-1}}} \int_{\mathbb{R}^d} dv_2 |v_{12}| \left[\frac{X}{S_d c_1^{d-1}} \delta(v_2-c_1) + \frac{Y}{S_d c_2^{d-1}}\delta(v_2-c_2)\right] \\ \dot Y \frac{1}{\cancel{S_d c_2^{d-1}}} = -\sigma^{d-1}\beta_d \frac{Y}{\cancel{S_d c_2^{d-1}}} \int_{\mathbb{R}^d} dv_2 |v_{12}| \left[\frac{X}{S_d c_1^{d-1}} \delta(v_2-c_1) + \frac{Y}{S_d c_2^{d-1}}\delta(v_2-c_2)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot X = -\sigma^{d-1}\beta_d \left[\frac{X^2}{S_d c_1^{d-1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv_2 |v_{12}| \delta(v_2-c_1)}_{=I_{11}} + \frac{XY}{S_d c_2^{d-1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv_2 |v_{12}| \delta(v_2-c_2)}_{=I_{21}} \right] \\ \dot Y = -\sigma^{d-1}\beta_d \left[\frac{Y^2}{S_d c_2^{d-1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv_2 |v_{12}| \delta(v_2-c_2)}_{=I_{22}} + \frac{XY}{S_d c_1^{d-1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv_2 |v_{12}| \delta(v_2-c_1)}_{=I_{12}} \right] \end{cases}$$

$I_{11} = 2\pi J_d\, c_1^d \sqrt{2}\, F_d$; $I_{21} = 2\pi J_d\, c_2^{d-1}\sqrt{c_1^2+c_2^2}\, F_d(c_1,c_2)$

$I_{22} = 2\pi J_d\, c_2^d\sqrt{2}\, F_d$; $I_{12} = 2\pi J_d\, c_1^{d-1}\sqrt{c_1^2+c_2^2}\, F_d(c_1,c_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot X = -\sigma^{d-1}\beta_d\, 2\pi J_d \left[X^2 \frac{c_1^{\cancel{d}}\sqrt{2} F_d}{S_d \cancel{c_1^{d-1}}} + XY \frac{\cancel{c_2^{d-1}}\sqrt{c_1^2+c_2^2}\, F_d(c_1,c_2)}{S_d \cancel{c_2^{d-1}}} \right] \\ \dot Y = -\sigma^{d-1}\beta_d\, 2\pi J_d \left[Y^2 \frac{c_2^{\cancel{d}}\sqrt{2} F_d}{S_d \cancel{c_2^{d-1}}} + XY \frac{\cancel{c_1^{d-1}}\sqrt{c_1^2+c_2^2}\, F_d(c_1,c_2)}{S_d \cancel{c_1^{d-1}}} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot X = -F_d\,\sigma^{d-1}\beta_d \frac{2\pi J_d}{S_d}\sqrt{2} \left[X^2 c_1 \cancel{\sqrt{2}}\cancel{F_d} + XY \frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{2}} \frac{F_d(c_1,c_2)}{F_d} \right] \cdot \frac{c_2}{c_2} \\ \dot Y = -F_d\,\sigma^{d-1}\beta_d \frac{2\pi J_d}{S_d}\sqrt{2} \left[Y^2 c_2 \cancel{\sqrt{2}}\cancel{F_d} + XY \frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{2}} \frac{F_d(c_1,c_2)}{F_d} \right] \cdot \frac{c_2}{c_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot X = -\sigma^{d-1} 2\pi \frac{\beta_d J_d F_d}{S_d}\sqrt{2} c_2 \left[X^2 \underbrace{\frac{c_1}{c_2}}_{=\gamma} + XY \frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{2}c_2} \frac{F_d(c_1,c_2)}{F_d} \right] \\ \dot Y = -\sigma^{d-1} 2\pi \frac{\beta_d J_d F_d}{S_d}\sqrt{2} c_2 \left[Y^2 + XY \underbrace{\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{2}c_2} \frac{F_d(c_1,c_2)}{F_d}}_{:=F} \right] \end{cases} \quad ; \tau = t\sigma^{d-1} 2\pi \frac{\beta_d J_d F_d}{S_d}\sqrt{2} c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot X &= -\gamma X^2 - XYF \\ \dot Y &= -Y^2 - XYF \end{aligned}}$$

; $\tau = t\sigma^{d-1} 2\pi \frac{\beta_d J_d F_d}{S_d}\sqrt{2}\, c_2$

$\beta_d = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\Gamma(\frac{d+1}{2})$; $J_d = \prod_{k=1}^{d-3}\int_0^\pi d\theta_k (\sin\theta_k)^k$; $\int_0^\pi dx (\sin(x))^k = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(1+k/2)}$

$S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$; $F_d = \lim_{c_i\to c_j} F_d(c_i,c_j)$

$F_d(c_i,c_j) = \int_{-1}^{1} dx \sqrt{1-2\frac{c_ic_j}{c_i^2+c_j^2}x}\Big/(1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}$

$F = \frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{2}c_2} F_d(c_1,c_2)/F_d$

Il faudrait vérifier avec le cas $c_1 = 0$ ...

Vérification avec le cas $C_1=0$:

$$f(v,t) = X\,\delta(v) + \frac{Y}{S_d C_2^{d-1}}\,\delta(v-c_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = -\sigma^{d-1}\beta_d\, X \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_{12}|\left[X\,\delta(v_2) + \frac{Y}{S_d C_2^{d-1}}\,\delta(v_2-c_2)\right] \\ \frac{\dot{Y}}{\cancel{S_d C_2^{d-1}}} = -\sigma^{d-1}\beta_d \frac{Y}{\cancel{S_d C_2^{d-1}}} \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_{12}|\left[X\,\delta(v_2) + \frac{Y}{S_d C_2^{d-1}}\,\delta(v_2-c_2)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = -\sigma^{d-1}\beta_d\left[X^2 \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_{12}|\,\delta(v_2) + \frac{XY}{S_d C_2^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_{12}|\,\delta(v_2-c_2)\right] & : \delta(v_1) \\ \dot{Y} = -\sigma^{d-1}\beta_d\left[\frac{Y^2}{S_d C_2^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_{12}|\,\delta(v_2-c_2) + XY \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_{12}|\,\delta(v_2)\right] & : \delta(v_1-c_2) \end{cases}$$

avec:

$$\delta(v_1)\int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_{12}|\,\delta(v_2) = \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_2|\,\delta(v_2) = 0$$

$$\delta(v_1)\int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_1-v_2|\,\delta(v_2-c_2) = \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_2|\,\delta(v_2-c_2) \qquad ; \underline{w} = v_2/c_2 \;;\; dw = \frac{1}{C_2^d}\,dv_2$$

$$= C_2^d \int_{\mathbb{R}^d} dw\,|\cancel{c_2}\hat{w}|\,\delta(\cancel{c_2}w-\cancel{c_2})$$

$$= C_2^d \int_{\mathbb{R}^d} d\Omega$$

$$= C_2^d S_d$$

$$\delta(v_1-c_2)\int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_1-v_2|\,\delta(v_2) = \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|\hat{v}_1 c_2 - v_2|\,\delta(v_2) = |\hat{v}_1 c_2| = c_2$$

$$\delta(v_1-c_2)\int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|v_1-v_2|\,\delta(v_2-c_2) = \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\,|\hat{v}_1 c_2 - v_2|\,\delta(v_2-c_2) \;;\quad \underline{w} = v_2/c_2 \;;\; dw = \frac{1}{C_2^d}\,dv_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} dw\, c_2^d\,|\hat{v}_1 c_2 - \hat{w} c_2|\,\delta(wc_2-c_2)$$

$$= c_2^d \int_{\mathbb{R}^d} dw\,\sqrt{2-2\cos\theta_{d-2}}\;\delta(w-1)$$

$$= c_2^d \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{\pi} d\theta_{d-2}\; \sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos\theta_{d-2}}\;\prod_{k=1}^{d-2}(\sin\theta_k)^k$$

$$= \sqrt{2}\,c_2^d\,2\pi\;\underbrace{\left(\prod_{k=1}^{d-3}\int_0^{\pi} d\theta_k\,(\sin\theta_k)^k\right)}_{=J_d}\;\underbrace{\int_0^{\pi} d\theta_{d-2}\,(\sin\theta_{d-2})^{d-2}\sqrt{1-\cos\theta_{d-2}}}_{=F_d}$$

$$= C_2^d\,\sqrt{2}\,2\pi\,J_d F_d$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma^{d-1}\beta_d\left[X^2\cdot 0 + \frac{XY}{\cancel{S_d C_2^{d-1}}}\,C_2^{\cancel{d}}\cancel{S_d}\right] = -\sigma^{d-1}\beta_d\,C_2\,XY \\ \dot{Y} = -\sigma^{d-1}\beta_d\left[\frac{Y^2}{S_d\,C_2^{d-1}}\,C_2^d\,\sqrt{2}\,2\pi\,J_d F_d + XY\,C_2\right] = -\sigma^{d-1}\beta_d\left[\frac{Y^2 c_2}{S_d}\sqrt{2}\,2\pi J_d F_d + c_2 XY\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = -\sigma^{d-1}\beta_d\,c_2\,XY \\ \dot{Y} = -\sigma^{d-1}\beta_d\,C_2\left[Y^2\,\sqrt{2}\,\frac{2\pi J_d F_d}{S_d} + XY\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = -\sigma^{d-1}\beta_d\,C_2\,\frac{\sqrt{2}\,2\pi J_d F_d}{S_d}\cdot\frac{S_d}{\sqrt{2}\,2\pi J_d F_d}\,XY \\ \dot{Y} = -\sigma^{d-1}\beta_d\,c_2\,\frac{\sqrt{2}\,2\pi J_d F_d}{S_d}\left[Y^2 + XY\,\frac{S_d}{\sqrt{2}\,2\pi J_d F_d}\right] \end{cases} \qquad ; \tau = t\,\sigma^{d-1}\,2\pi\,\frac{\beta_d J_d F_d}{S_d}\,\sqrt{2}\,C_2$$

même temps que dans le cas général $C_1 \neq 0$: ok.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = -XY\,\frac{S_d}{\sqrt{2}\,2\pi J_d F_d} \\ \dot{Y} = -Y^2 - XY\,\frac{S_d}{\sqrt{2}\,2\pi J_d F_d} \end{cases}$$

Soit $F_0 := \dfrac{S_d}{\sqrt{2}\, 2\pi J_d F_d}$, alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{X} &= -XY F_0 \\ \dot{Y} &= -Y^2 - XY F_0 \end{aligned}}$$

Pour achever la preuve, comme les temps τ sont les mêmes et ne dépendent pas de c_1 ni de c_2, alors il suffit de vérifier que

$$\lim_{c_1 \to 0} F = F_0$$

i.e.

$$\lim_{c_1 \to 0} \frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{2}\, c_2} \; \frac{\int_{-1}^{1} dx \sqrt{1 - \frac{2c_1c_2}{c_1^2+c_2^2} x} \Big/ (1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}}{\underbrace{\int_{-1}^{1} dx \sqrt{1-x} \Big/ \cancel{(1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}}}_{=F_d}} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{\sqrt{2}\,2\pi} \cancel{\frac{1}{F_d}} \frac{1}{J_d}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-1}^{1} dx \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}} = \frac{\cancel{2}\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\cancel{2}\pi} \frac{1}{\prod_{k=1}^{d-3} \underbrace{\sqrt{\pi}}_{\to\, \pi^{\frac{d-3}{2}}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Big/ \Gamma(1+k/2)} \quad ; \; \pi^{\frac{d}{2} - \frac{2}{2} - \frac{d-3}{2}} = \pi^{\frac{1}{2}(\cancel{d}-2-\cancel{d}+3)} = \pi^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dx \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{d-3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \prod_{k=1}^{d-3} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Big/ \Gamma(1+k/2)}$$

ce qui est à priori loin d'être évident. On admet que le cas général est correct.

<u>Comportement asymptotique</u> :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y^2 + XYF}{\gamma X^2 + XYF} = \frac{Y^2/X^2 + Y/X\, F}{\gamma + Y/X\, F} = \frac{V^2 + VF}{\gamma + VF}$$

$$\Rightarrow V + X\frac{dV}{dX} = \frac{V^2 + VF}{\gamma + VF}$$

$$\Rightarrow X\frac{dV}{dX} = \frac{V^2 + VF - \gamma V - V^2 F}{\gamma + VF} = \frac{V^2(1-F) + V(F-\gamma)}{\gamma + VF} = \frac{[V(1-F) + F - \gamma]\,V}{\gamma + VF}$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{X} = dV \frac{\gamma + VF}{[V(1-F) + F - \gamma]\,V} = dV \left[\frac{\alpha}{V} + \frac{\beta'}{V(1-F) + F - \gamma} \right] = dV \left[\frac{\alpha\{V(1-F) + F - \gamma\} + \beta' V}{V[V(1-F) + F - \gamma]} \right]$$

$$\Rightarrow \alpha\,[V(1-F) + F - \gamma] + \beta' V = \gamma + VF$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\alpha(1-F) + \beta' = F && \Rightarrow \beta' = F - \alpha(1-F) \\ &\alpha(F-\gamma) = \gamma && \Rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{F-\gamma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta' = F - \frac{\gamma(1-F)}{F-\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{X} = dV \left[\frac{\gamma}{F-\gamma} \frac{1}{V} + \underbrace{\left(F - \frac{\gamma(1-F)}{F-\gamma}\right) \frac{1}{1-F}}_{:=\beta} \frac{1}{V + \frac{F-\gamma}{1-F}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{X} = dV \left[\frac{\alpha}{V} + \frac{\beta}{V + \frac{F-\gamma}{1-F}} \right] \quad ; \; \alpha = \frac{\gamma}{F-\gamma} > 0 \; ; \; \beta = \frac{F}{1-F} - \frac{\gamma}{F-\gamma} = \frac{F}{1-F} - \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{X}{X_0}\right) = \alpha \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + \beta \ln\left(\frac{V+\mu}{V_0+\mu}\right) \quad ; \; \mu = \frac{F-\gamma}{1-F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{X}{X_0}\right) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\alpha} \left(\frac{V+\mu}{V_0+\mu}\right)^{\beta}} \quad ; \; \mu = \frac{F-\gamma}{1-F} \; ; \; \alpha = \frac{\gamma}{F-\gamma} > 0 \; ; \; \beta = \frac{F}{1-F} - \alpha > 0$$

<u>Cas limites</u> :

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{X}{X_0} = \frac{X_\infty}{X_0} = 0$$

$$\lim_{c_1 \to 0} \frac{X}{X_0} = \left(\frac{V+\mu_0}{V_0+\mu_0}\right)^{F_0/1-F_0} \quad ; \; \mu_0 = \frac{F_0}{1-F_0}$$

$$= \left(\frac{V + 1/\kappa}{V_0 + 1/\kappa}\right)^{1/\kappa} \quad ; \; \kappa = \frac{1-F_0}{F_0}$$

: <u>m. structure qu'en 2d</u> : <u>OK</u>.
↳ mais avec redéf. de κ.

Equation implicite pour $V(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{1}{X^2}\dot{X} = -\frac{1}{X^2}\left[-X^2\gamma - XYF\right] = \gamma + \overset{=V}{\frac{Y}{X}}F$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{x_0}{X}\right) = \gamma x_0 + x_0 V F$$

$$\Longrightarrow \frac{dV}{d\tau}\frac{d}{dV}\left(\frac{x_0}{X}\right) = \gamma x_0 + x_0 V F$$

$$\Longrightarrow dV \frac{d}{dV}\left(\frac{x_0}{X}\right) = (\gamma x_0 + x_0 V F)\, d\tau$$

$$\Longrightarrow x_0\, d\tau = dV \frac{1}{\gamma + VF}\frac{d}{dV}\left(\frac{x_0}{X}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{x_0\,\tau = \int_V^{V_0} ds\, \frac{1}{\gamma + F\cdot s}\,\frac{d}{ds}\left[-\left(\frac{V_0}{s}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0+\mu}{s+\mu}\right)^{\beta}\right]} \quad ; \alpha > 0 ; \beta > 0$$

Comportement asymptotique pour $X(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{X}\right) = \gamma + VF \qquad ; \lim_{\tau\to\infty} V(\tau) = 0$$

$$\Longrightarrow d\left(\frac{1}{X}\right) \simeq \gamma\, d\tau$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{X} - \frac{1}{x_0} \simeq \gamma\tau$$

$$\Longrightarrow \boxed{X(\tau) \underset{\tau\to\infty}{\simeq} \frac{x_0}{1+\gamma x_0 \tau}}$$

Bornes : a) $\frac{1}{\gamma} \geq \frac{1}{\gamma + F\cdot s} \Longrightarrow x_0\tau \leq \frac{1}{\gamma}\left[\frac{x_0}{X} - 1\right] \Longrightarrow X(\tau) \leq \frac{x_0}{1+\gamma x_0\tau}$

b) $\frac{1}{\gamma + F\cdot s} \geq \frac{1}{\gamma + FV_0} \Longrightarrow x_0\tau \geq \frac{1}{\gamma + FV_0}\left[\frac{x_0}{X} - 1\right] \Longrightarrow X(\tau) \geq \frac{x_0}{1+(\gamma + FY_0)\tau}$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{x_0}{1+(\gamma+FY_0)\tau} \leq X(\tau) \leq \frac{x_0}{1+\gamma x_0 \tau}}$$

Comportement asymptotique pour $Y(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{Y}\right) = -\frac{1}{Y^2}\dot{Y} = -\frac{1}{Y^2}\left(-Y^2 - XYF\right) = 1 + \frac{X}{Y}F = \cancel{1} + \frac{1}{V}F \qquad (*)$$

Comp. asymp. pour $V(\tau)$:

$$x_0\tau = \int_V^{V_0} ds\, \frac{1}{\gamma + \cancel{F\cdot s}}\,\frac{d}{ds}\left[-\left(\frac{V_0}{s}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0+\mu}{\cancel{s}+\mu}\right)^{\beta}\right]$$

$$\simeq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{V_0}{\mu}+1\right)^{\beta}\underbrace{\left[-\left(\frac{V_0}{s}\right)^{\alpha}\right]_V^{V_0}}_{\sim \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha}}$$

$$\simeq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{V_0}{\mu}+1\right)^{\beta}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha}$$

$$\Longrightarrow V^{\alpha} \simeq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{V_0}{\mu}+1\right)^{\beta}\frac{1}{x_0\tau}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V(\tau) \simeq \frac{1}{\gamma^{1/\alpha}}\left(\frac{V_0}{\mu}+1\right)^{\beta/\alpha}(x_0\tau)^{-1/\alpha}}$$

donc $(*) \Longrightarrow$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{Y}\right) \simeq \gamma^{1/\alpha}\left(\frac{V_0}{\mu}+1\right)^{-\beta/\alpha}(x_0\tau)^{1/\alpha}F$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{Y} - \cancel{\frac{1}{Y_0}} \simeq \gamma^{1/\alpha}\left(\frac{V_0}{\mu}+1\right)^{-\beta/\alpha} x_0^{1/\alpha}\,\frac{1}{1/\alpha+1}\,\tau^{1/\alpha+1}\,F$$

$$\Longrightarrow \quad Y(\tau) \simeq \gamma^{-1/\alpha} \left(\frac{v_0}{\mu}+1\right)^{\beta/\alpha} x_0^{-1/\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}+1\right) \tau^{-(1/\alpha+1)} F^{-1}$$

avec:

$$\frac{1}{\alpha}+1 = \frac{F-\gamma}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{F}{\gamma}$$

$$\Longrightarrow \quad Y(\tau) \simeq \gamma^{-1/\alpha} \left(\frac{v_0}{\mu}+1\right)^{\beta/\alpha} x_0^{-1/\alpha} \frac{\cancel{F}}{\gamma} \frac{1}{\cancel{F}} \tau^{-F/\gamma}$$

$$\simeq \gamma^{-(1/\alpha+1)} \left(\frac{v_0}{\mu}+1\right)^{\beta/\alpha} \frac{1}{x_0^{1/\alpha}} \tau^{-F/\gamma}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{Y(\tau) \simeq \frac{1}{\gamma^{F/\gamma} x_0^{1/\alpha}} \left(\frac{v_0}{\mu}+1\right)^{\beta/\alpha} \tau^{-F/\gamma}}$$

$$\mu = \frac{F-\gamma}{1-F} \;;\quad \gamma = c_1/c_2 \;;\quad \alpha = \frac{\gamma}{F-\gamma} > 0 \;;\quad \beta = \frac{F}{1-F} - \alpha > 0$$

Même structure que $d=2,3\ldots$

Dimension arbitraire $d>3$: cas particulier $c_1=0$

. On a déjà établi : (pages 3,4)

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{X} &= -XYF_0\\ \dot{Y} &= -Y^2-XYF_0\end{aligned}}$$

A nouveau, mêmes calculs que pour $d=2,3$.

Résolution :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y^2+XYF_0}{XYF_0} = 1 + \frac{Y}{X}\frac{1}{F_0} = 1+\frac{1}{F_0}V$$

$$\Rightarrow V + X\frac{dV}{dX} = 1+\frac{1}{F_0}V$$

$$\Rightarrow X\frac{dV}{dX} = 1+\underbrace{\left(\frac{1}{F_0}-1\right)}_{:=\varkappa}V$$

: même éqn. que $d=2$, avec différent $\varkappa$.

$$\Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{dV}{1+\varkappa V}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{X}{X_0}\right) = \frac{1}{\varkappa}\ln\left(\frac{1/\varkappa+V}{1/\varkappa+V_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{X}{X_0} = \left(\frac{1/\varkappa+V}{1/\varkappa+V_0}\right)^{1/\varkappa}}$$

Calcul de X_∞ :

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{X}{X_0}\right) = \frac{X_\infty}{X_0} = \frac{1}{(1+\varkappa V_0)^{1/\varkappa}}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_\infty = \frac{X_0}{(1+\varkappa V_0)^{1/\varkappa}}}$$

Comportement asymptotique

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{1}{X^2}\dot{X} = -\frac{1}{X^2}\left(-XYF_0\right) = \frac{Y}{X}F_0 = VF_0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{X_0}{X}\right) = VX_0F_0 \qquad ; \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dV}\frac{dV}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{d\tau}\frac{d}{dV}\left(\frac{X_0}{X}\right) = VX_0F_0$$

$$\Rightarrow F_0X_0\,d\tau = dV\,\frac{1}{V}\frac{d}{dV}\left[\left(\frac{1/\varkappa+V_0}{1/\varkappa+V}\right)^{1/\varkappa}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{F_0X_0\tau = \int_V^{V_0} ds\,\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left[-\left(\frac{1/\varkappa+V_0}{1/\varkappa+s}\right)^{1/\varkappa}\right]}$$

Intégration par parties : C'est exactement la même expression que le cas 2d, $c_1=0$, eq. (10), avec $X_0 := X_0F_0$, donc

$$F_0X_0\tau \simeq -I-\ln\left(\frac{V^{(1+V_0\varkappa)^{1/\varkappa}}}{V_0^{1/(1+V_0\varkappa)}}\right) \quad ; \quad I = \int_0^{V_0} ds\,h(s)\frac{d^2}{ds^2}\left[-\left(\frac{1/\varkappa+V_0}{1/\varkappa+s}\right)^{1/\varkappa}\right]$$

$$\Rightarrow V(\tau) \simeq V_0^{\frac{1}{(1+V_0\varkappa)^{1/\varkappa+1}}}\exp\Bigg(-\underbrace{\frac{I}{(1+V_0\varkappa)^{1/\varkappa}}}_{=I\frac{X_\infty}{X_0}}\Bigg)\exp\Bigg(-F_0\underbrace{\frac{X_0}{(1+V_0\varkappa)^{1/\varkappa}}}_{=X_\infty}\tau\Bigg)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\tau) \simeq \xi\, e^{-F_0X_\infty\tau}} \qquad ; \quad \xi = V_0^{1/(1+V_0\varkappa)^{1/\varkappa+1}}\cdot e^{-I\frac{X_\infty}{X_0}}$$

Comportements asymptotiques de X et Y

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{X}\right) = VF_0 = \xi F_0 e^{-F_0X_\infty\tau} \qquad ; \quad \int_\tau^\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X_\infty}-\frac{1}{X(\tau)} = \xi \cancel{F_0}\frac{1}{-\cancel{F_0}X_\infty}e^{-F_0X_\infty s}\Big|_\tau^\infty = \frac{\xi}{X_\infty}e^{-F_0X_\infty\tau}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{X(\tau)} = \frac{1-\xi e^{-F_0 X_\infty \tau}}{X_\infty}$$

$$\Longrightarrow \boxed{X(\tau) = X_\infty \frac{1}{1-\xi e^{-F_0 X_\infty \tau}} \simeq X_\infty \left[1 + \xi e^{-F_0 X_\infty \tau} \right]}$$

pour $Y(\tau)$:

$$\dot{X} = -XY F_0$$

$$\Longrightarrow \cancel{X_\infty}\left[0 + \xi(+\cancel{F_0} X_\infty) e^{-F_0 X_\infty \tau} \right] = +\cancel{X_\infty}\left[1 + \cancelto{O(e^{-2F_0 X_\infty \tau})}{\xi e^{-F_0 X_\infty \tau}} \right] Y \cancel{F_0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Y(\tau) \simeq \xi X_\infty e^{-F_0 X_\infty \tau}}$$

<u>Relation entre X et Y</u> :

$$\boxed{X(\tau) = X_\infty + Y(\tau)}$$

$\boxed{\text{Cas général } V_1 \neq 0}$ dimension $d=2$

Equation:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v_1,t) = -2\sigma f(v_1,t) \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 |v_{12}| f(v_2,t) \tag{1}$$

Condition initiale (distribution):

$$f(v,t) = X \frac{1}{2\pi c_1} \delta(v-c_1) + Y \frac{1}{2\pi c_2} \delta(v-c_2) \quad ; \; c_1 \neq c_2 \; ; \; c_1 > 0 \; ; \; c_2 > c_1. \tag{2}$$

Eqn. pour X et Y: (2) dans (1) $\Longrightarrow$

$$\dot{X} \frac{1}{2\pi c_1} \delta(v-c_1) + \dot{Y} \frac{1}{2\pi c_2} \delta(v-c_2) = -2\sigma \left[X \frac{1}{2\pi c_1} \delta(v-c_1) + Y \frac{1}{2\pi c_2} \delta(v-c_2) \right] \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 |v_{12}| \left[\frac{X}{2\pi c_1} \delta(v_2-c_1) + \frac{Y}{2\pi c_2} \delta(v_2-c_2) \right] \tag{3}$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} \dot{X} \cancel{\frac{1}{2\pi c_1}} = -2\sigma X \cancel{\frac{1}{2\pi c_1}} \Bigg[\frac{X}{2\pi c_1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \, \delta(v_2-c_1)}_{:= I_{11}} + \frac{Y}{2\pi c_2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \, \delta(v_2-c_2)}_{:= I_{21}} \Bigg] \quad ; \; |v_1| = c_1 \tag{4}$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} \dot{Y} \cancel{\frac{1}{2\pi c_2}} = -2\sigma Y \cancel{\frac{1}{2\pi c_2}} \Bigg[\frac{X}{2\pi c_1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \, \delta(v_2-c_1)}_{:= I_{12}} + \frac{Y}{2\pi c_2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \, \delta(v_2-c_2)}_{:= I_{22}} \Bigg] \quad ; \; |v_1| = c_2 \tag{5}$$

Calcul des I_{ij} : interprétation : I_{ij} = intégrale avec $|V_1| = c_j$ et $|V_2| = c_i$

$$I_{ij} = \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \, \delta(v_2-c_i) \Big|_{|v_1|=c_j} = \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |\hat{v}_1 c_j - v_2| \, \delta(v_2-c_i) \quad ; \; W = v_2/c_i$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} dW \, c_i^2 \, |\hat{v}_1 c_j - \hat{W} c_i| \, \delta(W-1) \frac{1}{c_i}$$

$$= c_i \int_{\mathbb{R}^2} dW \, |\hat{v}_1 c_j - \hat{W} c_i| \, \delta(W-1) \tag{6}$$

1) $i=j$:

$$I_{ii} \overset{(6)}{=} c_i^2 \int_{\mathbb{R}^2} dW \, |\hat{v}_1 - \hat{W}| \, \delta(W-1)$$

$$= c_i^2 \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{\hat{v}_1^2 + \hat{W}^2 - 2\hat{v}_1^2 \hat{W}^2 \cos\theta} \quad ; \; \hat{v}_1^2 = \hat{W}^2 = 1$$

$$= c_i^2 \int_0^{2\pi} d\theta \, \sqrt{2} \sqrt{1-\cos\theta} \quad ; \; 1-\cos\theta = 2(\sin\theta/2)^2$$

$$= 2c_i^2 \int_0^{2\pi} d\theta \, |\sin\theta/2| \quad ; \; x = \theta/2 \; ; \; dx = \tfrac{1}{2} d\theta$$

$$= 4 c_i^2 \int_0^{\pi} dx \, \sin(x)$$

$$= 8 c_i^2 \tag{7}$$

2) $i \neq j$:

$$I_{ij} \overset{(6)}{=} c_i \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{c_i^2 + c_j^2 \underline{- 2c_i c_j \cos\theta}}$$

$$\underline{- 2c_i c_j \cos\theta} = -2c_ic_j + 2c_ic_j - 2c_ic_j\cos\theta = -2c_ic_j + 2c_ic_j \underbrace{(1-\cos\theta)}_{=2(\sin\theta/2)^2}$$

$$= c_i \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{\underbrace{c_i^2 + c_j^2 - 2c_ic_j}_{=(c_i-c_j)^2} + 4c_ic_j (\sin\theta/2)^2} \quad ; \; \begin{matrix} x = \theta/2 \\ dx = d\theta/2 \end{matrix}$$

$$= 2c_i |c_i - c_j| \int_0^{\pi} dx \sqrt{1 + \frac{4c_ic_j}{(c_i-c_j)^2} \sin x^2}$$

$$= 4 c_i |c_i - c_j| \, E[k] \quad ; \; E[k] = \int_0^{\pi/2} dx \sqrt{1 + k^2 \sin(x)^2} \tag{8}$$

$$k = 2\sqrt{c_ic_j}/|c_i - c_j|$$

$$\lim_{c_i \to 0} E[k] = \lim_{c_j \to 0} E[k] = \frac{\pi}{2}$$

Eqn. pour X et Y : (4) et (5) $\Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{X} &= -\frac{\sigma}{\pi} \left[X^2 \frac{I_{11}}{c_1} + XY \frac{I_{21}}{c_2} \right] \\ \dot{Y} &= -\frac{\sigma}{\pi} \left[Y^2 \frac{I_{22}}{c_2} + XY \frac{I_{12}}{c_1} \right] \end{aligned}} \tag{9}$$

Expressions explicites : (7), (8) et (9) $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \dot{X} = -\dfrac{\sigma}{\pi} \left[X^2 \dfrac{8c_1^{\cancel{2}}}{\cancel{c_1}} + XY \dfrac{4 \cancel{c_2} |c_1 - c_2| E[k]}{\cancel{c_2}} \right] & \cdot \left(\dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{2} \right) \cdot \left(\dfrac{c_2}{c_2} \right) \\ \dot{Y} = -\dfrac{\sigma}{\pi} \left[Y^2 \dfrac{8c_2^{\cancel{2}}}{\cancel{c_2}} + XY \dfrac{4 \cancel{c_2} |c_1 - c_2| E[k]}{\cancel{c_1}} \right] & \cdot \left(\dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{2} \right) \cdot \left(\dfrac{c_2}{c_2} \right) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{X} = -\frac{\sigma}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{2}\cdot c_2 \left[X^2 \frac{8c_1}{c_2}\cdot\frac{2}{\pi} + XY \frac{4|c_1-c_2|}{c_2} E[k]\frac{2}{\pi}\right] \\ \dot{Y} = -\frac{\sigma}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{2}\cdot c_2 \left[Y^2 \frac{8c_2}{c_2}\frac{2}{\pi} + XY\, 4\frac{|c_1-c_2|}{c_2} E[k]\frac{2}{\pi}\right] \end{cases} \quad ; \gamma = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{X} = -2\sigma c_2 \left[X^2 \gamma \frac{4}{\pi} + XY \frac{|c_1-c_2|}{c_2} E[k]\frac{2}{\pi}\right] \\ \dot{Y} = -2\sigma c_2 \left[Y^2 \frac{4}{\pi} + XY \frac{|c_1-c_2|}{c_2} E[k]\frac{2}{\pi}\right] \end{cases} \quad ; \tau = 2\sigma c_2 t$$

$$F(c_1,c_2) := \frac{|c_1-c_2|}{c_2} E[k]\frac{2}{\pi}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{X} &= -\gamma\frac{4}{\pi}X^2 - XY\,F(c_1,c_2) \\ \dot{Y} &= -\frac{4}{\pi}Y^2 - XY\,F(c_1,c_2) \end{aligned}} \qquad (10)$$

$$F(c_1,c_2) = \frac{2}{\pi}\frac{|c_1-c_2|}{c_2}\int_0^{\pi/2} dx\sqrt{1+\frac{4c_1c_2}{|c_1-c_2|^2}\sin^2 x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx\sqrt{\frac{c_1^2+c_2^2-2c_1c_2}{c_2^2}\left(1+\frac{4c_1c_2}{|c_1-c_2|^2}\right.}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx\sqrt{\frac{|c_1-c_2|^2}{c_2^2}+\frac{4c_1}{c_2}\sin^2 x}$$

avec : $F(c_1,c_2) = \frac{|c_1-c_2|}{c_2}E[k]\frac{2}{\pi}$; $\lim_{c_1\to 0} F(c_1,c_2) = 1$

$E[k] = \int_0^{\pi/2} dx\sqrt{1+k^2\sin^2 x}$; $k = 2\sqrt{c_1c_2}/|c_1-c_2|$; $\gamma = c_1/c_2$

Dans la limite $c_1\to 0$ on retrouve bien les équations établies dans le cas particulier $c_1=0$.

<u>Comportement asymptotique :</u> $(10) \Rightarrow$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y^2\,4/\pi + XYF}{\gamma X^2\,4/\pi + XYF} = \frac{Y^2/X^2\,4/\pi + {}^X/_Y\,F}{\gamma 4/\pi + \cancel{XY}\,F} = \frac{V^2\frac{4}{\pi} + VF}{\gamma 4/\pi + VF}$$

$$\Longrightarrow V + X\frac{dV}{dX} = \frac{V^2\,4/\pi + VF}{\gamma 4/\pi + VF}$$

$$\Longrightarrow X\frac{dV}{dX} = \frac{V^2\,4/\pi + VF - V\,4/\pi\,\gamma - V^2F}{\gamma 4/\pi + VF} = \frac{V^2(4/\pi - F) + V(F - 4/\pi\,\gamma)}{\gamma 4/\pi + VF}$$

$$\Longrightarrow \frac{dX}{X} = dV\frac{\gamma 4/\pi + VF}{V^2\left(\frac{4}{\pi}-F\right) - V\left(\gamma\frac{4}{\pi}-F\right)} = dV\frac{\gamma 4/\pi + VF}{\left[V\left(\frac{4}{\pi}-F\right) - \gamma\frac{4}{\pi}+F\right]V}$$

$$= dV\left[\frac{\alpha}{V} + \frac{\beta'}{V(4/\pi - F) - \gamma\frac{4}{\pi}+F}\right] = dV\left[\frac{\alpha\{V(4/\pi - F) - \gamma 4/\pi + F\} + \beta' V}{[V(4/\pi - F) - \gamma 4/\pi + F]\,V}\right] \qquad (11)$$

$$\Longrightarrow \alpha V(4/\pi - F) - \alpha\gamma 4/\pi + \alpha F + \beta' V = \gamma 4/\pi + VF$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha(4/\pi - F) + \beta' = F & \Longrightarrow \beta' = F - \alpha\left(\frac{4}{\pi}-F\right) \\ -\alpha\gamma 4/\pi + \alpha F = \gamma\frac{4}{\pi} & \Longrightarrow \alpha\left(F - \gamma\frac{4}{\pi}\right) = \gamma 4/\pi \Longrightarrow \alpha = \gamma 4/\pi / (F - \gamma 4/\pi) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \beta' = F - \frac{\gamma\frac{4}{\pi}}{F - \gamma\frac{4}{\pi}}\left(\frac{4}{\pi}-F\right) \qquad (12)$$

(12) dans (11) $\Longrightarrow$

$$\frac{dX}{X} = dV\left(\frac{\alpha}{V} + \underbrace{\frac{\beta'}{\frac{4}{\pi}-F}}_{:=\beta}\ \frac{1}{V + \frac{-\gamma 4/\pi + F}{\frac{4}{\pi}-F}}\right) \quad ; \beta = \frac{F}{\frac{4}{\pi}-F} - \frac{\gamma\frac{4}{\pi}}{F - \gamma\frac{4}{\pi}}$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{X}{X_0}\right) = \alpha\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + \beta\ln\left(\frac{V + \frac{F-\gamma 4/\pi}{4/\pi - F}}{V_0 + \frac{F-\gamma 4/\pi}{4/\pi - F}}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{X}{X_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{V + \frac{F-\gamma 4/\pi}{4/\pi - F}}{V_0 + \frac{F-\gamma 4/\pi}{4/\pi - F}}\right)^{\beta}} \qquad (13)$$

vérifié numériquement

avec : $\alpha = \frac{\gamma\frac{4}{\pi}}{F - \gamma 4/\pi} > 0$; $\beta = \frac{F}{\frac{4}{\pi}-F} - \alpha > 0$; $\lim_{c_1\to 0}\alpha = 0$; $\lim_{c_1\to 0}\beta = \frac{1}{\frac{4}{\pi}-1} = \frac{1}{\kappa}$

<u>Cas limites :</u>

$\lim_{\tau\to\infty}\frac{X}{X_0} = \frac{X_\infty}{X_0} \overset{(13)}{=} 0$: oui : pas d'espèce survivante dès que $c_1 > 0$

$\lim_{c_1\to 0}\frac{X}{X_0} = \left(\frac{V + 1/(4/\pi - 1)}{V_0 + 1/(4/\pi - 1)}\right)^{1/\kappa} = \left(\frac{V + 1/\kappa}{V_0 + 1/\kappa}\right)^{1/\kappa}$: or, le m. résultat déjà obtenu pour $c_1 = 0$.

Equation implicite pour $V(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{1}{X^2}\dot{X} \overset{(10)}{=} -\frac{1}{X^2}\left(-\gamma\frac{4}{\pi}X^2 - XYF\right) = \gamma\frac{4}{\pi} + \frac{Y}{X}F = \gamma\frac{4}{\pi} + VF \quad ; \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dV}\frac{dV}{d\tau}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{X_0}{X}\right) = \left(\gamma\frac{4}{\pi} + VF\right)X_0$$

$$\Longrightarrow \frac{dV}{d\tau}\frac{d}{dV}\left(\frac{X_0}{X}\right) = \left(\gamma\frac{4}{\pi} + VF\right)X_0$$

$$\Longrightarrow X_0\, d\tau \overset{(13)}{=} dV \frac{1}{\gamma\frac{4}{\pi} + VF}\frac{d}{dV}\left(\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0 + \frac{F - 4/\pi\gamma}{4/\pi - F}}{V + \frac{F - 4/\pi\gamma}{4/\pi - F}}\right)^{\beta}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{X_0\tau = \int_V^{V_0} ds \frac{1}{\gamma\frac{4}{\pi} + F\cdot S}\frac{d}{ds}\left[-\left(\frac{V_0}{s}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0 + \frac{F - 4/\pi\gamma}{4/\pi - F}}{S + \frac{F - 4/\pi\gamma}{4/\pi - F}}\right)^{\beta}\right]} \quad ; \alpha > 0 ; \beta > 0 \qquad (14)$$

Comportement asymptotique pour $X(\tau)$: $(10) \Longrightarrow$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{X}\right) = \gamma\frac{4}{\pi} + VF \quad ; \lim_{\tau\to\infty} V(\tau) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{X}\right) \simeq \frac{4}{\pi}\gamma$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{X} - \frac{1}{X_0} \simeq \frac{4}{\pi}\gamma\tau$$

$$\Longrightarrow \boxed{X(\tau) \simeq \frac{X_0}{1 + \frac{4\gamma}{\pi}X_0\tau}} \qquad (15)$$

Remarque: bornes : on peut aussi trouver des bornes sup. et inf. pour $X(\tau)$:

a) $$\frac{1}{\gamma\frac{4}{\pi}} \geqslant \frac{1}{\gamma\frac{4}{\pi} + F\cdot S} \Longrightarrow X_0\tau \leqslant \frac{\pi}{4\gamma}\left[\frac{X_0}{X} - 1\right] \Longrightarrow X(\tau) \leqslant \frac{X_0}{1 + \frac{4\gamma}{\pi}X_0\tau} \qquad (16)$$

b) $$\frac{1}{\gamma\frac{4}{\pi} + FS} \geqslant \frac{1}{\gamma\frac{4}{\pi} + F\cdot V_0} \Longrightarrow X_0\tau \geqslant \frac{1}{\gamma\frac{4}{\pi} + F\cdot V_0}\left[\frac{X_0}{X} - 1\right] \Longrightarrow X(\tau) \geqslant \frac{X_0}{1 + \left(\frac{4\gamma}{\pi} + FY_0\right)\tau} \qquad (17)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{X_0}{1 + \left(\frac{4\gamma}{\pi} + FY_0\right)\tau} \leqslant X(\tau) \leqslant \frac{X_0}{1 + \frac{4\gamma}{\pi}X_0\tau}} \qquad (18)$$

A nouveau, $X(\tau)$ converge vers la borne supérieure.

Comportement asymptotique pour $Y(\tau)$: $(10) \Longrightarrow$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{Y}\right) = -\frac{1}{Y^2}\dot{Y} \overset{(10)}{=} -\frac{1}{Y^2}\left[-\frac{4}{\pi}Y^2 - XYF\right] = \frac{4}{\pi} + \frac{X}{Y}F = \frac{4}{\pi} + V^{-1}F \qquad (19)$$

On doit d'abord déterminer le comportement asymptotique pour $V(\tau)$, avec (14):

$$X_0\tau = \int_V^{V_0} ds \frac{1}{\gamma\frac{4}{\pi} + F\cdot S}\frac{d}{ds}\left[-\left(\frac{V_0}{s}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0 + \mu}{s + \mu}\right)^{\beta}\right] \quad ; \mu = \frac{F - 4/\pi\gamma}{4/\pi - F} \qquad (20)$$

m. cas que 3d : peut négliger s dans les termes ne produisant pas de divergence:

$$X_0\tau \overset{\tau\to\infty}{\simeq} \frac{\pi}{4\gamma}\left(\frac{V_0 + \mu}{\mu}\right)^{\beta}\underbrace{\left[-\left(\frac{V_0}{s}\right)^{\alpha}\right]_V^{V_0}}_{= -1 + \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha} \simeq \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha}}$$

$$\Longrightarrow X_0\tau V^{\alpha} \simeq \frac{\pi}{4\gamma}\left(\frac{V_0}{\mu} + 1\right)^{\beta} V_0^{\alpha}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V(\tau) \overset{\tau\to\infty}{\simeq} V_0\left(\frac{V_0}{\mu} + 1\right)^{\beta/\alpha}\left(\frac{4\gamma X_0}{\pi}\tau\right)^{-1/\alpha}} \quad ; \mu = \frac{F - 4/\pi\gamma}{4/\pi - F} \qquad (21)$$

(21) dans (19) $\Longrightarrow$

négligeable devant $\tau^{1/\alpha}$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{Y}\right) \overset{\tau\to\infty}{\simeq} \cancel{\frac{4}{\pi}} + F\frac{1}{V_0}\left(\frac{V_0}{\mu} + 1\right)^{-\beta/\alpha}\left(\frac{4\gamma X_0}{\pi}\tau\right)^{1/\alpha}$$

$$\frac{1}{Y} - \cancel{\frac{1}{Y_0}}^{\text{négligeable}} \underset{\tau\to\infty}{\simeq} F \frac{1}{V_0}\left(\frac{V_0}{\mu}+1\right)^{-\beta/\alpha}\left(\frac{4\gamma x_0}{\pi}\right)^{1/\alpha}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+1}\,\tau^{\frac{1}{\alpha}+1}$$

$$\Longrightarrow\ Y(\tau) \simeq \frac{V_0}{F}\left(\frac{V_0}{\mu}+1\right)^{\beta/\alpha}\left(\frac{4\gamma}{\pi}\right)^{-1/\alpha} x_0^{-1/\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\tau^{-(1/\alpha+1)} \qquad (22)$$

avec: $$\frac{1}{\alpha}+1 = \frac{F-\gamma\,4/\pi}{\gamma\,4/\pi} + \frac{\gamma\,4/\pi}{\gamma\,4/\pi} = F\cdot\frac{\pi}{4\gamma}$$

$$\Longrightarrow\ Y(\tau) \simeq \frac{V_0}{\cancel{F}}\,\cancel{F}\,\underbrace{\frac{\pi}{4\gamma}\left(\frac{\pi}{4\gamma}\right)^{1/\alpha}}_{=\left(\frac{\pi}{4\gamma}\right)^{1/\alpha+1} = \left(\pi/4\gamma\right)^{F\,\pi/4\gamma}}\left(\frac{V_0}{\mu}+1\right)^{\beta/\alpha}\tau^{-F\frac{\pi}{4\gamma}}\quad\frac{1}{x_0^{1/\alpha}}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{Y(\tau) \overset{\tau\to\infty}{\simeq} \frac{V_0}{x_0^{1/\alpha}}\left(\frac{\pi}{4\gamma}\right)^{\frac{\pi}{4\gamma}F}\left(\frac{4/\pi-F}{F-4/\pi\,\gamma}V_0+1\right)^{\beta/\alpha}\tau^{-\frac{\pi}{4\gamma}F}} \qquad (23)$$

$$\alpha = \frac{\gamma\,4/\pi}{F-\gamma\,4/\pi} > 0\,;\quad \beta = \frac{F}{\frac{4}{\pi}-F} - \alpha > 0$$

Remarque: si $C_1 \to 0$; $C_1 > 0$, alors la décroissance de Y est d'autant plus rapide. En effet, dans ce cas on se rapproche du cas limite où $C_1 = 0$ pour lequel $Y(\tau)$ a une décroissance exponentielle, d'où la divergence de l'exposant de la loi de puissance qui "essaye d'approcher" l'exponentielle. On a bien entendu pas le droit de réaliser formellement cette limite dans (23).

$\boxed{\text{Cas particulier } V_1 = 0}$ dimension $d = 2$

Equation :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v_1,t) = -\sigma^{d-1} \int d\hat\sigma \, \Theta(\hat\sigma v_{12})(\hat\sigma \hat v_{12}) \int_{\mathbb{R}^d} dv_2 \, |v_{12}| \, f(v_1,t) f(v_2,t)$$

$$\overset{d=2}{=} -\sigma \underbrace{\int d\hat\sigma \, \Theta(\hat\sigma v_{12})(\hat\sigma \hat v_{12})}_{\substack{= \pi^{1/2}/\Gamma(3/2) \\ = \pi^{1/2}/\Gamma(1+1/2) \\ = \pi^{1/2}/\pi^{1/2}/2 \\ = 2}} f(v_1,t) \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \, f(v_2,t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} f(v_1,t) = -2\sigma f(v_1,t) \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 |v_{12}| \, f(v_2,t)} \qquad (1)$$

Condition initiale (distribution) :

$$f(v,t) = X(t)\, \delta(v) + Y(t) \frac{1}{2\pi c} \delta(v-c) \quad ; c_1 = 0 ; c_2 = c \quad \left(\text{en effet} : \int_{\mathbb{R}^2} dv \, f(v,t) = X \int dv\, \delta(v) + \frac{1}{2\pi} Y \int dv\, \delta(v-c) = X + Y = n \right) \qquad (2)$$

(2) dans (1) $\Longrightarrow$

$$\dot X \delta(v_1) + \dot Y \frac{1}{2\pi c} \delta(v_1 - c) = -2\sigma \left[X \delta(v_1) + Y \frac{1}{2\pi c} \delta(v_1 - c) \right] \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 |v_{12}| \left[X \delta(v_2) + Y \frac{1}{2\pi c} \delta(v_2 - c) \right] \qquad (3)$$

Coefficient $\delta(v_1)$:

$$\dot X = -2\sigma X \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \left[X \delta(v_2) + \frac{Y}{2\pi c} \delta(v_2 - c) \right]$$

$$= -2\sigma X^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_1 - v_2| \, \delta(v_2)}_{= 0 \text{ car } v_1 = v_2 = 0.} - 2\sigma X Y \frac{1}{2\pi c} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_1 - v_2| \, \delta(v_2 - c)}_{\substack{\overset{v_1=0}{=} \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_2| \, \delta(v_2 - c) \\ = 2\pi \int_0^\infty dv_2 \, v_2^2 \, \delta(v_2 - c) \\ = 2\pi c^2}}$$

$$= -2\sigma X Y c \qquad (4)$$

Coefficient $\delta(v_1 - c)$:

$$\dot Y \frac{1}{2\pi c} = -2\sigma \frac{Y}{2\pi c} \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \left[X \delta(v_2) + \frac{Y}{2\pi c} \delta(v_2 - c) \right]$$

$$= -2\sigma \frac{XY}{2\pi c} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \, \delta(v_2)} - 2\sigma \frac{Y^2}{(2\pi c)^2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \, \delta(v_2 - c)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_1 - v_2| \, \delta(v_2)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |c \cdot \hat v_1 - v_2| \, \delta(v_2)$$
$$= c \cdot |\hat v_1|$$
$$= c$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |v_{12}| \, \delta(v_2 - c) \quad ; |v_1| = c$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} dv_2 \, |\hat v_1 c - v_2| \, \delta(v_2 - c) \quad ; |v_2| = c, \; w = v_2/c \; ; d^2 w = \frac{1}{c^2} d^2 v_2$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} dw \, c^2 \, c \, |\hat v_1 - \hat w| \, \underbrace{\delta(cw - c)}_{= 1/c \, \delta(w-1)}$$
$$= c^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dw \, |\hat v_1 - \hat w| \, \delta(w-1) \quad ; |\hat v_1| = |\hat w| = 1$$
$$= c^2 \int_0^{2\pi} d\theta \, \sqrt{2 - 2\cos\theta} \quad ; 1 - \cos\theta = 2(\sin\theta/2)^2$$
$$= c^2 \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, \sqrt{2} \sin\theta/2 \quad ; x = \theta/2 \; ; dx = d\theta/2$$
$$= c^2 . 2 . \int_0^\pi dx \, 2 \sin x$$
$$= 8 c^2$$

$$= -2\sigma \frac{XY}{2\pi c} c - 2\sigma \frac{Y^2}{(2\pi c)^2} 8 c^2$$

Conclusion :

$$\begin{cases} \dot X = -2\sigma c X Y \\ \dot Y = -2\sigma c \left[XY + \frac{4}{\pi} Y^2 \right] \end{cases}$$

rescaling : $\tau = t \cdot 2\sigma c \Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot X &= -XY \\ \dot Y &= -XY - 4/\pi \, Y^2 \end{aligned}} \qquad (5)$$

• <u>Résolution</u> : (5) $\Rightarrow$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{XY + 4/\pi\, Y^2}{XY} = 1 + \frac{4}{\pi}\frac{Y}{X} = 1 + 4/\pi\, V \quad ; V = Y/X \quad ; Y = VX$$

$$\Rightarrow V + X\frac{dV}{dX} = 1 + \frac{4}{\pi}V$$

$$\Rightarrow X\frac{dV}{dX} = 1 + \underbrace{(4/\pi - 1)}_{:=\varkappa} V$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{dV}{1+\varkappa V} = \frac{1}{\varkappa}\frac{dV}{1/\varkappa + V}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{X}{X_0}\right) = \frac{1}{\varkappa}\ln\left(\frac{1/\varkappa + V}{1/\varkappa + V_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{X}{X_0} = \left(\frac{1/\varkappa + V}{1/\varkappa + V_0}\right)^{1/\varkappa}} \quad ; \varkappa = \frac{4}{\pi} - 1 = 0.2732\ldots \qquad (6)$$

• <u>Calcul de X_∞</u> : (6) et $\lim\limits_{\tau\to\infty}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{X}{X_0} = \frac{X_\infty}{X_0} = \left(\frac{1/\varkappa}{1/\varkappa + V_0}\right)^{1/\varkappa} = \frac{1}{(1+\varkappa V_0)^{1/\varkappa}} \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \boxed{X_\infty = \frac{X_0}{(1+\varkappa V_0)^{1/\varkappa}}} \qquad (8)$$

Si $X_0 = Y_0 = 1$, alors $X_\infty = (\pi/4)^{1/\varkappa} = 0.413095\ldots$

• <u>Comportement asymptotique</u> :

$$(5) \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{1}{X^2}\dot{X} \overset{(5)}{=} -\frac{1}{X^2}(-XY) = V \qquad (9)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{X_0}{X}\right) = X_0 V$$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1/\varkappa + V_0}{1/\varkappa + V}\right)^{1/\varkappa} = X_0 V \quad ; \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dV}\frac{dV}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V}\frac{dV}{d\tau}\frac{d}{dV}\left(\frac{1/\varkappa + V_0}{1/\varkappa + V}\right)^{1/\varkappa} = X_0$$

$$\Rightarrow X_0\, d\tau = \frac{1}{V}dV\,\frac{d}{dV}\left(\frac{1/\varkappa + V_0}{1/\varkappa + V}\right)^{1/\varkappa}$$

$$\Rightarrow X_0\tau = \int_{V_0}^{V} ds\,\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{1/\varkappa + V_0}{1/\varkappa + s}\right)^{1/\varkappa}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_0\tau = \int_V^{V_0} ds\,\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left[-\left(\frac{1/\varkappa + V_0}{1/\varkappa + s}\right)^{1/\varkappa}\right]} \qquad (10)$$

Intégration par parties : $f = \ln(s)$; $f' = 1/s$
$g = \frac{d}{ds}[\ldots]$; $g' = \frac{d^2}{ds^2}[\ldots]$

$$\Rightarrow X_0\tau = \int_V^{V_0} ds\, f'g = -\int_V^{V_0} ds\, fg' + fg\Big|_V^{V_0}$$

$$= -\underbrace{\int_V^{V_0} ds\,\ln(s)\frac{d^2}{ds^2}[\ldots]}_{\substack{\text{approximation } \tau\to\infty \\ \Rightarrow \int_V^{V_0} \to \int_0^{V_0}}} + \ln(s)\underbrace{\frac{d}{ds}\left[-\left(\frac{1/\varkappa + V_0}{1/\varkappa + s}\right)^{1/\varkappa}\right]}_{= -(1/\varkappa + V_0)^{1/\varkappa}\left(-\frac{1}{\varkappa}\right)\frac{1}{(1/\varkappa + s)^{1/\varkappa + 1}}}\Bigg|_V^{V_0}$$

$$\simeq -\underbrace{\int_0^{V_0} ds\,\ln(s)\frac{d^2}{ds^2}\left[-\left(\frac{1/\varkappa + V_0}{1/\varkappa + s}\right)^{1/\varkappa}\right]}_{:= I} + \underbrace{\ln(s)\frac{1}{\varkappa}\frac{(1/\varkappa + V_0)^{1/\varkappa}}{(1/\varkappa + s)^{1/\varkappa + 1}}\Bigg|_V^{V_0}}$$

$$= \ln(V_0)\frac{1}{\varkappa}\underbrace{\frac{(1/\varkappa + V_0)^{1/\varkappa}}{(1/\varkappa + V_0)^{1/\varkappa + 1}}}_{= \frac{1}{\varkappa}\frac{1}{1/\varkappa + V_0}} - \ln(V)\frac{1}{\varkappa}\underbrace{\frac{(1/\varkappa + V_0)^{1/\varkappa}}{(1/\varkappa + V)^{1/\varkappa + 1}}}$$

comme $\frac{1}{\varkappa} + 1 \sim 5$, alors $1/(1/\varkappa + V)^{1/\varkappa + 1} \sim 1/(1/\varkappa)^{1/\varkappa + 1}$ si $\tau \to \infty$ (i.e. on peut poser $V = 0$) : ce terme n'engendre pas de constante du type e^{-cte} mais contribue à la pente $e^{-\ldots\tau}$, qui dans cette approximation a été vérifiée numériquement.

$$\simeq -I + \ln(V_0)\frac{1}{1 + V_0\varkappa} - \ln(V)\,(1 + \varkappa V_0)^{1/\varkappa}$$

$$= -I - \ln\left(\frac{V^{(1+V_0\varkappa)^{1/\varkappa}}}{V_0^{1/(1+V_0\varkappa)}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{V^{(1+V_0\varkappa)^{1/\varkappa}}}{V_0^{1/(1+V_0\varkappa)}} = \exp(-X_0\tau)\exp(-I)$$

$$\Rightarrow V(\tau) \simeq V_0^{\frac{1}{1+V_0\varkappa}\frac{1}{(1+V_0\varkappa)^{1/\varkappa}}}\exp\left(-\frac{X_0}{(1+V_0\varkappa)^{1/\varkappa}}\tau\right)\exp\left(-I/(1+V_0\varkappa)^{1/\varkappa}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{V(\tau) \simeq V_0^{1/(1+V_0\kappa)^{1/\kappa+1}} \; e^{-\frac{X_\infty}{X_0} I} \; e^{-X_\infty \tau}} \quad ; \; I = \int_0^{V_0} ds \, h_1(s) \frac{d^2}{ds^2}\left[-\left(\frac{1/\kappa + V_0}{1/\kappa + s}\right)^{1/\kappa}\right] \tag{11}$$

$$\kappa = 4/\pi - 1 = 0.2732\ldots$$

$$X_\infty = \frac{X_0}{(1+V_0\kappa)^{1/\kappa}}$$

<u>Comportements asymp. de X et Y:</u>

$$(9) \Longrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{X}\right) \simeq \xi \exp(-X_\infty \tau) \quad ; \boxed{\xi = V_0^{1/(1+V_0\kappa)^{1/\kappa+1}} \; e^{-\frac{X_\infty}{X_0} I}} \quad ; \quad \int_\tau^\infty$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{X_\infty} - \frac{1}{X(\tau)} \simeq \xi \, e^{-X_\infty s}\Big|_\tau^\infty = \frac{\xi}{X_\infty} e^{-X_\infty \tau}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{X(\tau)} \simeq \frac{1-\xi e^{-X_\infty \tau}}{X_\infty}$$

$$\Longrightarrow \boxed{X(\tau) \simeq \frac{X_\infty}{1-\xi e^{-X_\infty \tau}} \simeq X_\infty\left[1 + \xi e^{-X_\infty \tau}\right]} \tag{12}$$

<u>et:</u>

$$(5) \Longrightarrow \dot{X} = -XY \quad , \text{avec} \quad \dot{X} = X_\infty\left[0 - X_\infty \xi e^{-X_\infty \tau}\right]$$

$$\Longrightarrow -X_\infty^{\cancel{2}} \xi e^{-X_\infty \tau} \simeq -\cancel{X_\infty}\left[1 + \xi e^{-X_\infty \tau}\right] Y$$

$$\Longrightarrow Y(\tau) \simeq \frac{X_\infty \xi e^{-X_\infty \tau}}{1 + \xi e^{-X_\infty \tau}} \simeq X_\infty \xi e^{-X_\infty \tau}\left[1 - \underbrace{\cancel{\xi e^{-X_\infty \tau}}}_{O(e^{-2X_\infty \tau})}\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{Y(\tau) \simeq X_\infty \xi e^{-X_\infty \tau}} \tag{13}$$

<u>Relation entre X et Y:</u>

$$\boxed{X(\tau) = X_\infty + Y(\tau)} \tag{14}$$

Borne pour Y: (32) Pia. $\Rightarrow$

$$\frac{dX}{dY} = \frac{4\gamma X^2 + (3+\gamma^2)XY}{4Y^2 + (3+\gamma^2)XY} \quad ; \quad Y = V\cdot X \Rightarrow X = \frac{Y}{V}$$

$$\frac{dX}{dY} = \frac{d}{dY}\left(\frac{Y}{V}\right) = \frac{1}{V} - Y\frac{1}{V^2}\frac{dV}{dY}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{Y}{V}\frac{dV}{dY}\right) = V\,\frac{4\gamma(Y/V)^2 + (3+\gamma^2)\cancel{Y}(Y/V)}{4Y^2 + (3+\gamma^2)\cancel{Y}(Y/V)}$$

$$= \frac{4\gamma + (3+\gamma^2)V}{4V + (3+\gamma^2)}$$

$$\Rightarrow -\frac{Y}{V}\frac{dV}{dY} = \frac{4\gamma + (3+\gamma^2)V - 4V - (3+\gamma^2)}{4V + (3+\gamma^2)} = \frac{4\gamma - 3 - \gamma^2 + V[3+\gamma^2-4]}{4V + (3+\gamma^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{Y} = \frac{4V + (3+\gamma^2)}{[3+\gamma^2-4\gamma + V(1-\gamma^2)]V}\,dV = \left(\frac{\alpha}{V} + \frac{\beta(1-\gamma^2)}{(1-\gamma^2)V + 3 + \gamma^2 - 4\gamma}\right)dV \quad ; \ \alpha,\beta \text{ à déterminer} \qquad (1)$$

α,β: $\alpha\cdot\left((1-\gamma^2)V + (3+\gamma^2-4\gamma)\right) + \beta(1-\gamma^2)V = 4V + (3+\gamma^2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(1-\gamma^2) + \beta(1-\gamma^2) = 4 \\ \alpha(3+\gamma^2-4\gamma) = 3+\gamma^2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{3+\gamma^2}{3+\gamma^2-4\gamma} = \frac{3+\gamma^2}{(1-\gamma)(3-\gamma)} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{4 - \alpha(1-\gamma^2)}{1-\gamma^2} = \frac{4 - (3+\gamma^2)(1-\gamma^2)/(1-\gamma)(3-\gamma)}{(1-\gamma)(1+\gamma)}$$

$$= \frac{4(3-\gamma) - (3+\gamma^2)(1+\gamma)}{(1-\gamma^2)(3-\gamma)} \qquad (3)$$

(2) et (3) dans (1) $\Rightarrow$

$$\frac{dY}{Y} = \left[\frac{\alpha}{V} + \frac{\beta(1-\gamma^2)}{(1-\gamma^2)V + 3+\gamma^2-4\gamma}\right]dV \quad ; \ \alpha = \frac{3+\gamma^2}{(1-\gamma)(3-\gamma)} \ ; \ \beta = \frac{4(3-\gamma) - (3+\gamma^2)(1+\gamma)}{(1-\gamma^2)(3-\gamma)} \qquad (4)$$

Intégration: t_0, t:

$$\underbrace{\int_Y^{Y_0}\frac{dz}{z}}_{=\ln\left(\frac{Y_0}{Y}\right)} = \underbrace{\int_V^{V_0} dz\,\frac{\alpha}{z}}_{=\alpha\ln\left(\frac{V_0}{V}\right)} + \underbrace{\int_V^{V_0} dz\,\frac{\beta(1-\gamma^2)}{(1-\gamma^2)z + (1-\gamma)(3-\gamma)}}$$

$$= \int_V^{V_0} dz\,\frac{\beta}{z + \frac{(1-\gamma)(3-\gamma)}{(1-\gamma)(1+\gamma)}} = \beta\ln\left(\frac{V_0 + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}{V + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Y_0}{Y} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0 + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}{V + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}\right)^{\beta} \qquad (5)$$

Avec:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{Y}\right) = 4 + (3+\gamma^2)\frac{X}{Y}$$

(5) devient:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{Y_0}{Y}\right) = Y_0\left[4 + (3+\gamma^2)\frac{1}{V}\right] = \frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0 + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}{V + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}\right)^{\beta}\right]$$

$$= \frac{d}{dV}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0 + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}{V + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}\right)^{\beta}\right]\frac{dV}{d\tau}$$

$$\Rightarrow Y_0\,d\tau = \frac{dV}{4 + \frac{3+\gamma^2}{V}}\,\frac{d}{dV}\left\{\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0 + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}{V + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}\right)^{\beta}\right\}$$

$$\Rightarrow Y_0\tau = \int_{V_0}^{V}\frac{du}{4 + \frac{3+\gamma^2}{u}}\,\frac{d}{du}\left\{\left(\frac{V_0}{u}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0 + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}{V + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}\right)^{\beta}\right\} \quad ; \quad \alpha > 0,\ \beta > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_0\tau = \int_V^{V_0} du\,\frac{u}{3+\gamma^2+4u}\left\{-\frac{d}{du}\left[\left(\frac{V_0}{u}\right)^{\alpha}\left(\frac{V_0 + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}{u + \frac{3-\gamma}{1+\gamma}}\right)^{\beta}\right]\right\}} \qquad (6)$$

Borne supérieure:

$$\frac{u}{\beta+\gamma^2+4u} \leq \frac{v_0}{\beta+\gamma^2+4v} \leq \frac{v_0}{\beta+\gamma^2}$$

$$\Longrightarrow y_0\tau \leq \frac{v_0}{\beta+\gamma^2}\left(-1+\frac{y_0}{y}\right)$$

$$\Longrightarrow y(\tau) \leq \frac{y_0/x_0 \cdot y_0}{\frac{y_0}{x_0}+(\beta+\gamma^2)y_0\tau} = \frac{y_0}{1+(\beta+\gamma^2)x_0\tau}$$

$$\begin{cases}\dot X = -4\gamma X^2 - (3+\gamma^2)XY \\ \dot Y = -4Y^2 - (3+\gamma^2)XY\end{cases} \longrightarrow \dot{\left(\frac{1}{X}\right)} = 4\gamma + (3+\gamma^2)\frac{Y}{X} = 4\gamma + (3+\gamma^2)V \qquad (*)$$

$; \ 0<\gamma<1$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{4Y^2 + (3+\gamma^2)XY}{4\gamma X^2 + (3+\gamma^2)XY} \ (1) \quad ; \ Y = V\cdot X \ (2) \ (\text{déf. de } V)$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} \overset{(2)}{=} V + \frac{dV}{dX} \overset{(1)}{=} \frac{4V^2 + (3+\gamma^2)V}{4\gamma + (3+\gamma^2)V}$$

$$\Rightarrow X\frac{dV}{dX} = \frac{4V^2 + (3+\gamma^2)V - 4\gamma V - (3+\gamma^2)V^2}{4\gamma + (3+\gamma^2)V} = \frac{V^2 - \gamma^2 V^2 + (3+\gamma^2-4\gamma)V}{4\gamma + (3+\gamma^2)V} = \frac{(1-\gamma^2)V^2 + (3+\gamma^2-4\gamma)V}{4\gamma + (3+\gamma^2)V}$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{4\gamma + (3+\gamma^2)V \ dV}{\left[(1-\gamma^2)V + (3+\gamma^2-4\gamma)\right]V} \quad ; \ 3+\gamma^2-4\gamma = (1-\gamma)(3-\gamma)$$

$$\Rightarrow (1-\gamma)\frac{dX}{X} = \frac{4\gamma + (3+\gamma^2)V}{\left[(1+\gamma)V + (3-\gamma)\right]}\frac{dV}{V} = \frac{\alpha}{V} + \frac{\beta}{(1+\gamma)V + (3-\gamma)}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha\left((1+\gamma)V + (3-\gamma)\right) + \beta V}{\left[(1+\gamma)V + (3-\gamma)\right]V} = \frac{4\gamma + (3+\gamma^2)V}{\left[(1+\gamma)V + (3-\gamma)\right]V}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha(3-\gamma) = 4\gamma \\ \beta + \alpha(1+\gamma) = (3+\gamma^2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha = \dfrac{4\gamma}{3-\gamma} \\ \beta = 3+\gamma^2 - \dfrac{4\gamma(1+\gamma)}{3-\gamma}\end{cases}$$

Equation suite : $(1-\gamma)\ln\left(\frac{X}{X_0}\right) = \alpha \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + \frac{\beta}{1+\gamma}\ln\left(\frac{(1+\gamma)V + 3-\gamma}{(1+\gamma)V_0 + 3-\gamma}\right)$; $V_0 = \frac{Y_0}{X_0}$

$$\Rightarrow \left(\frac{X}{X_0}\right)^{1-\gamma} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{(1+\gamma)V + 3-\gamma}{(1+\gamma)V_0 + 3-\gamma}\right)^{\frac{\beta}{1+\gamma}}$$

$$\Rightarrow \frac{X_0}{X} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)V + 3-\gamma}{(1+\gamma)V_0 + 3-\gamma}\right)^{-\beta \underbrace{\frac{1}{(1+\gamma)(1-\gamma)}}_{=\frac{1}{1-\gamma^2}}}$$

$$\Rightarrow X_0 \underbrace{\dot{\left(\frac{1}{X}\right)}}_{(*)} = \frac{d}{d\tau}\underbrace{\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\gamma}}\left(\frac{(1+\gamma)V + 3-\gamma}{(1+\gamma)V_0 + 3-\gamma}\right)^{-\frac{\beta}{1-\gamma^2}}\right]}_{=\chi(V)} := \frac{d}{d\tau}\chi(V)$$

$$\Rightarrow X_0\left(4\gamma + (3+\gamma^2)V\right) = \frac{d}{d\tau}\chi(V)$$

$$\Rightarrow d\tau = \frac{\chi(V)}{X_0\left(4\gamma + (3+\gamma^2)V\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \int_{V_0}^{V} du \, \frac{\chi(u)}{X_0\left[4\gamma + (3+\gamma^2)u\right]}}$$

$\overset{\text{num}}{\tau = \tau(V)} \longrightarrow \overset{\text{num}}{V = V(\tau)} \longrightarrow \overset{\text{num}}{\frac{Y(\tau)}{X(\tau)}} =$ dans (*) + intégrer

puis dans (*)

+ comportement asymptotique : terme divergent dominant.

$$\tau = \int_{v_0}^{v} du \, \frac{x(u)}{x_0\left[4\gamma+(3+\gamma^2)u\right]} = \frac{1}{x_0}\int_{v_0}^{v} du \left(\frac{u}{v_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\alpha}} \left[\frac{(1+\gamma)u+3-\gamma}{(1+\gamma)v_0+3-\gamma}\right]^{\frac{1-\gamma^2}{\beta}} \frac{1}{4\gamma+(3+\gamma^2)u}$$

avec: $\alpha = \frac{4\gamma}{3-\gamma}$; $\alpha \in]0,2[$

$\beta = 3+\gamma^2 - \frac{4\gamma(1+\gamma)}{3-\alpha} \in]0,3[$

Calcul : exposants non entiers avec fractions ⇒ fct. hypergéométriques… ⇒ ξ ⇒ recours logiciel :

$$\Rightarrow \tau(v) = \frac{1}{4\gamma(a+\gamma-1)x_0}\cdot\left[(\gamma-1)\left(\frac{3+\gamma(-1+v)+v}{3-\gamma}\right)^{\frac{\beta}{\gamma^2-1}}\left(\frac{3+\gamma(-1+v_0)+v_0}{3-\gamma}\right)^{\frac{\beta}{\gamma^2-1}}\cdot\left\{ v\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{\alpha}{-1+\gamma}}\left(\frac{3+\gamma(-1+v)+v}{3+\gamma(-1+v_0)+v_0}\right)^{\frac{\beta}{-1+\gamma^2}}\left(\frac{3+\gamma(-1+v_0)+v_0}{3-\gamma}\right)^{\frac{\beta}{-1+\gamma^2}} \text{AppelF1}[\ldots] - \left(\frac{3+\gamma(-1+v)+v}{3-\gamma}\right)^{\frac{\beta}{-1+\gamma^2}} v_0 \, \text{AppelF1}[\ldots]\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{4\gamma(a+\gamma-1)x_0}\cdot\left[(-1+\gamma)\left\{ v\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{\alpha}{-1+\gamma}}\left(1-\frac{(1+\gamma)v}{-3+\gamma}\right)^{-\frac{\beta}{-1+\gamma^2}}\left(\frac{3+\gamma(-1+v)+v}{3+\gamma(-1+v_0)+v_0}\right)^{-\frac{\beta}{-1+\gamma^2}} \text{AppelF1}[v] + v_0\left(1-\frac{(1+\gamma)v_0}{-3+\gamma}\right)^{-\frac{\beta}{-1+\gamma^2}} \text{AppelF1}[\ldots v_0]\right\}\right]$$

$$= \frac{\gamma-1}{4\gamma(a+\gamma-1)x_0}\left[v\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{\alpha}{-1+\gamma}}\overbrace{\left(1-\frac{(1+\gamma)v}{3-\gamma}\right)}^{=\frac{3-\gamma-(1+\gamma)v}{3-\gamma}}{}^{\frac{\beta}{1-\gamma^2}}\left(\frac{3-\gamma+v(\gamma+1)}{3-\gamma+v_0(\gamma+1)}\right)^{\frac{\beta}{1-\gamma^2}} \text{App.} + v_0\underbrace{\left(1+\frac{(1+\gamma)v_0}{3-\gamma}\right)}_{=\frac{3-\gamma+(1+\gamma)v_0}{3-\gamma}}{}^{\frac{\beta}{1-\gamma^2}} \text{App.}\right]$$

$$= \frac{\gamma-1}{4\gamma(a+\gamma-1)x_0}\left[v\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma-1}}\left(\frac{3-\gamma-(1+\gamma)v}{3-\gamma}\cdot\frac{3-\gamma+v_0(\gamma+1)}{3-\gamma+(1+\gamma)v}\right)^{\frac{\beta}{1-\gamma^2}} \text{App.} + v_0\cdot\left(\frac{3-\gamma+(1+\gamma)v_0}{3-\gamma}\right)^{\frac{\beta}{1-\gamma^2}} \text{App}\right]$$

$$\tau(v) = \frac{1-\gamma}{x_0\, 4\gamma(1-\gamma-a)}\cdot\left[v\left(\frac{v_0}{v}\right)^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}\left(\frac{3-\gamma-(1+\gamma)v}{3-\gamma+(1+\gamma)v}\;\frac{3-\gamma+v_0(\gamma+1)}{3-\gamma}\right)^{\frac{\beta}{1-\gamma^2}} \text{AppelF1}\left[1-\frac{\alpha}{1-\gamma};\frac{\beta}{1-\gamma^2},1,2-\frac{\alpha}{1-\gamma},\frac{(1+\gamma)v}{\gamma-3},-\frac{(3+\gamma^2)v}{4\gamma}\right] + v_0\left(\frac{3-\gamma+v_0(1+\gamma)}{3-\gamma}\right)^{\frac{\beta}{1-\gamma^2}} \text{AppelF1}\left[\ldots v_0, v_0\right]\right]$$

Soit : $h(\gamma,V_0) = \left[\dfrac{3-\gamma + V_0(\gamma+1)}{3-\gamma}\right]^{\frac{\beta}{1-\gamma^2}}$

$$App[V] = \text{Appel}F_1\left[\underbrace{1-\frac{\alpha}{1-\gamma}}_{\alpha_1};\ \frac{\beta}{1-\gamma^2},\ 1,\ \underbrace{2-\frac{\alpha}{1-\gamma}}_{1+\alpha_1}\ -\frac{(1+\gamma)}{3-\gamma}V,\ -\frac{3+\gamma^2}{4\gamma}V\right] \quad (\text{Gradshteyn p. 1080 ss.})$$

Alors :

$$\tau(V) = \frac{1-\gamma}{4\gamma(1-\gamma-\alpha)}\,\frac{1}{x_0}\cdot\left\{V\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}\left(\frac{3-\gamma-(1+\gamma)V}{3-\gamma+(1+\gamma)V}\right)^{\frac{\beta}{1-\gamma^2}}\cdot h(\gamma,V_0)\,App[V] + V_0\,h(\gamma,V_0)\,App[V_0]\right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tau(V) = \frac{1}{x_0}\cdot\frac{h(\gamma,V_0)\cdot(1-\gamma)}{4\gamma(1-\gamma-\alpha)}\left\{V\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}\left(\frac{3-\gamma-(1+\gamma)V}{3-\gamma+(1+\gamma)V}\right)^{\frac{\beta}{1-\gamma^2}}App[V] + V_0\,App[V_0]\right\}}$$

avec : $\text{Appel}F_1[a;b_1,b_2;c;x,y]$ qui est la fonction hypergéométrique de deux variables (Gradshteyn p. 1080 ss.)